

# 单复变函数课程笔记

Based on MATH 205 at UC, Berkeley

整理者: 梁浩然

随着知识的累积,笔记中许多内容已颇显稚嫩,因此,笔者正计划重新修缮这份笔记,敬请期待!

二零二壹年七月

献给 Dan-Virgil Voiculescu 教授

# 特别鸣谢

感谢西安交通大学郝平教授，感谢陶中恺、齐浩然学长，感谢刘辰月、王锦涛、高子晨、赵天宇、王子铭、李迪龙、王峥、魏家晔等同学。

感谢他们对编写这份笔记的支持和帮助；感谢他们对这份笔记提出的宝贵建议和意见；感谢他们的辛苦付出！没有他们，这份笔记不可能得以完成，



## 目 录

1	几何部分 .....	2
1.1	从 Cauchy 定理谈起 .....	2
1.2	最大模原理和 Schwarz 引理 .....	4
1.3	正规族 .....	5
1.4	单连通和黎曼球面 .....	10
1.5	分式线性变换 .....	17
1.6	黎曼映照定理的证明 .....	21
1.7	多边形的共形映射 .....	26
1.8	椭圆积分和椭圆函数 (一) .....	29
1.9	弧边多边形的情形 .....	35
1.10	应用: Picard 小定理 .....	40
1.11	* 双曲几何的两个模型 .....	41
1.12	习题 .....	43
2	级数部分 .....	46
2.1	Mittag-Leffler 定理 .....	46
2.2	Weierstrass 定理 .....	49
2.3	*Cousin 第一、第二问题 .....	53
2.4	从复分析看 $\Gamma$ 函数 .....	55
2.5	浅谈群上的 Fourier 变换与 Mellin 变换 .....	62
2.6	黎曼 $\zeta$ 函数 .....	67
2.7	$\Theta$ 函数 .....	71
2.8	椭圆函数 (二): Weierstrass $\wp$ -函数 .....	76
2.9	习题 .....	80
3	问题提示 .....	84
3.1	几何部分 .....	84
3.2	级数部分 .....	84
	参考文献 .....	86

## 写在前面的话

---

这份笔记是基于二零二零年春季加州大学伯克利分校开设的“Theory of Functions of a Complex Variable” (MATH 205) 这门课程中 Dan-Virgil Voiculescu 教授的部分讲稿和笔者的笔记完成的. 课程内容主要参考了 Stein[1] 和 Ahlfors[2] 的复分析教材, 难度介于本科生和研究生复分析课程之间, 要求学生具有一定分析、拓扑和代数基础.

笔记的主要内容大致分为“几何”和“级数”两个部分. 几何部分包括正规族、黎曼映照定理的证明和应用、(弧边) 多边形的共形映射等内容; 级数部分包括 Mittag-Leffler 定理与 Weierstrass 定理、 $\Gamma$  函数、黎曼 $\zeta$ 函数、 $\Theta$  函数和 Weierstrass  $\wp$ -函数等内容. 笔记中的许多证明和插图借鉴了 [1]、[2] 和 [4] 书中的内容.

笔记也不只限于这两部分, Dan-Virgil Voiculescu 教授也提及了许多复变函数与其他数学领域的联系, 如模函数、黎曼 $\zeta$ 函数与数论,  $\Theta$  函数与偏微分方程, 与组合数学等的联系. 笔者补充了教授讲稿中的细节, 增添了不少新的内容, 使之更加翔实.

笔记给出了习题提示. 笔者之所以只给出提示, 是希望读者在独立思考中有所收获. 正如数学家 John M. Lee 所说: “如果提供完整的习题解答, 即使是最认真的学生, 也难以在遇到困难时抵挡翻阅答案的诱惑. 但正是在绝望与挣扎的边缘时的学习最为有效, 我们不断尝试突破困境, 终在错综复杂中开辟一条道路。”

笔者尝试着把它写成一本人情味儿的笔记, 而不是一味严肃地搭建理论的砖块. 复变函数的海洋里有无穷无尽的多姿多彩的贝壳, 这本小小的笔记也仅是海边拾贝, 希望读者能感受到它们的美丽和丰富, 更希望读者能体会到贝壳后面的大海是那么广袤, 那么深邃.

衷心希望读者能有所收获.

笔者 梁浩然

二零二零年四月二十日

# 第 1 章

## 几何部分

在复分析这门课程中, 我们已经接触过著名的黎曼映照定理 (Riemann Mapping Theorem), 对共形映射有所体会. 而这本笔记的几何部分正是围绕着它的证明和应用展开的. 我们将介绍德国数学家 Paul Koebe 对黎曼映照定理的简洁证明 (第1.6小节). 在此之前, 我们首先做些准备工作, 大致包括: Schwarz 引理、正规族、连通性、分式线性变换等, 即第1.1-1.5小节.

第1.7-1.9小节, 我们将介绍有关多边形的共形映射的一些结果, 包括 Schwarz-Christoffel 定理、椭圆积分等, 并通过引入 Schwarz 导数简单介绍弧边多边形的共形映射, 这将自然把我们引入模函数及其应用上, 即第1.10小节. 最后, 我们还将将在第1.11小节谈谈双曲几何的单位圆盘模型与上半平面模型.

由于第1.1和1.2小节的内容比较基础, 这里将略去大部分证明. 它们只是开胃菜, 盛宴在后面更精彩的部分.

### 1.1 从 Cauchy 定理谈起

我们的旅程, 将从大家熟悉的 Cauchy 定理开始.

**定理 1.1.1 (圆盘上的 Cauchy 定理)** 若  $f$  在某个圆盘内解析, 那么

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (1-1)$$

其中,  $\gamma$  是在该圆盘内的任意闭曲线.

复分析课程已介绍过其证明, 故不再赘述 (详见 [1], 第二章第 1-4 节). 它的大致想法是先证明 Goursat 定理, 即  $\gamma$  为圆盘内部三角形闭曲线的特殊情况. 根据该定理导出解析函数局部存在原函数的性质, 从而证明 Cauchy 定理. Cauchy 定理有许多推广, 如在1.4小节我们将把它推广到单连通区域上. 大数学家 John B. Conway 的书 [4]、[12] 对此娓娓道来, 讲述了不同版本的 Cauchy 定理, 非常有趣.

我们自然会问, 若函数  $f$  满足 (1-1) 式, 那么它是不是解析的呢? 实际上, Morera 定理给出了肯定的答案 (证明见 [1] 第二章第 5 节).

**定理 1.1.2 (Morera 定理)** 若在开圆盘  $D$  内连续的函数  $f$  满足: 对任意包含于  $D$  内的三角形闭曲线  $T$  有

$$\int_T f(z) dz = 0,$$

那么  $f$  在  $D$  内解析.

另外, 由 Cauchy 定理可以立即推出 Cauchy 积分公式:

**定理 1.1.3 (Cauchy 积分公式)** 设  $f$  在一个包含圆盘  $D$  的闭包的开集内解析. 记该圆盘的边界为圆  $C$  (定向为正), 那么对任意  $z \in D$ , 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1-2)$$

它的证明并不困难, 选择合适的积分围道即可. 这种手法在复分析中经常使用 (不熟悉的同学请查阅 [1] 第二章第 4 节).

此外, 有如下推论:

**推论 1.1.4** 若  $f$  在开集  $\Omega$  内解析, 那么  $f$  在  $\Omega$  内无穷阶复可导. 另外, 若圆  $C \subset \Omega$  的内部 (记为  $C^0$ ) 也包含在  $\Omega$  内, 那么对任意  $z \in C^0$ , 有

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

证明: 对  $n$  归纳.  $n = 0$  的情形即定理 1.1.3. 假设  $f$  有直到  $n - 1$  阶复导数, 且

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta.$$

对充分小的  $h$ , 有

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \right] d\zeta.$$

记  $A = 1/(\zeta - z - h)$ ,  $B = 1/(\zeta - z)$  则上式中括号内的部分即

$$\frac{h}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} [A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}].$$

注意到  $h$  充分小, 令  $h$  趋于 0 取极限即得:

$$f^{(n)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \left[ \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right] \frac{n}{(\zeta - z)^{n-1}} d\zeta = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

□

**注 1.1.5** 这里给出几个注记.

(1) 上述定理中的圆  $C$  若改为“分段光滑闭曲线”结论依然成立.

(2) 可以得到对上述  $f$  的一些估计. 若以  $z_0$  为中心, 半径为  $R$  的圆盘  $D$  的闭包 (记为  $\bar{D}$ ) 包含于  $\Omega$  内, 那么

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! \|f\|_{\bar{D}}}{R^n},$$

其中  $\|f\|_A = \sup_{z \in A} |f(z)|$ .

(3) 实际上, 用类似的办法可以证明: 若  $\varphi(\zeta)$  在连续闭曲线  $\gamma$  上连续, 那么函数

$$F_n(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^n} \quad (1-3)$$

在所有由  $\gamma$  决定的区域内解析, 并且其导数满足  $F'_n(z) = nF_{n+1}(z)$ . (习题 1.)

## 1.2 最大模原理和 Schwarz 引理

这一小节我们回顾有关最大模原理 (Maximum Modulus Principle) 和 Schwarz 引理的相关知识. 简言之, Schwarz 引理可以利用最大模原理得到, 而最大模原理则是开映射定理的直接推论, 开映射定理又可以用 Rouché 定理得到 (见 [1], 第三章第 4 节). 我们只做简要回顾.

这里采取 Ahlfors 书 [2] 中对最大模原理的表述.

**定理 1.2.1 (最大模原理)** 若  $f$  在区域  $\Omega$  内解析且不为常值函数, 那么  $|f(z)|$  在  $\Omega$  内无最大值.

除开映射定理外, 最大模原理也可以由 Cauchy 积分公式 (定理 1.1.3) 得到. 注意到

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta.$$

即可. 该定理有另一种表述形式, 它为证明 Schwarz 引理提供方便.

**定理 1.2.1'** 若  $f$  在紧集  $K$  上连续, 在  $K$  的内部解析, 那么

$$\sup_{z \in K} |f(z)| = \sup_{z \in \partial K} |f(z)|.$$

下面我们来证明 Schwarz 引理.

**定理 1.2.2 (Schwarz 引理)** 若  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  解析, 且  $f(0) = 0$ , 那么:

- (1)  $|f(z)| \leq |z|, \forall z \in \mathbb{D}$ , 从而  $|f'(0)| \leq 1$ .
- (2) 若在一点  $z_0 \neq 0$  成立  $f(z_0) = z_0$ , 或  $|f'(0)| = 1$ , 那么  $f$  是一个旋转变换.

证明: 由  $f$  在  $\mathbb{D}$  内解析, 将  $f$  在原点展开

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

而  $f(0) = 0$ , 故  $a_0 = 0$ . 因此

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

在  $\mathbb{D}$  内解析. 对于  $|z| = r < 1$ , 由  $|f(z)| \leq 1$ , 我们有

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r}.$$

由最大模原理 (定理 1.2.1), 上式对任意  $|z| \leq r$  成立. 令  $r \rightarrow 1^-$  取极限即得 (1).

对 (2), 由条件和最大模原理立即得  $g$  是模为 1 的常值函数, 从而  $f$  是旋转变换.  $\square$

值得注意的是, 上述引理要求  $f(0) = 0$ , 这个条件并不是本质的, 也就是说原点并没有那么特殊. 我们将在第 1.5 小节利用单位圆盘的自同构来讨论这个问题, 并得到更一般的结论.

### 1.3 正规族

这一小节主要讨论定义在开集上函数族的性质, 包括紧集上的一致收敛、一致有界和列紧性. 若不加说明, 本节中  $\Omega \subset \mathbb{C}$  表示开集,  $K \Subset \Omega$  表示  $K$  是  $\Omega$  的紧子集. 另外, 记  $\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|$ , 即  $f$  在  $K$  上的无穷范数. (关于范数的讨论, 不熟悉的同学可以查阅 [3] 第一章第四节.)

首先我们给出紧集上一致收敛和正规族的定义:

**定义 1.3.1 (紧集上的一致收敛)** 设  $\{f_n\}$  是定义在  $\Omega$  上的函数列, 若存在定义在  $\Omega$  上的函数  $f$ , 使得对任意  $K \Subset \Omega$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| = 0 \quad (1-4)$$

则称  $\{f_n\}$  在  $\Omega$  的紧子集上一致收敛到  $f$ . 记为  $f_n \xrightarrow{\Omega} f$ .

**定义 1.3.2 (正规族)** 设定义在开集  $\Omega$  上的函数族  $\mathcal{F}$ , 若任意函数列  $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ , 存在其子列  $\{f_{n_k}\}$  和函数  $f$  (其中  $f$  未必在  $\mathcal{F}$  内!), 使得  $f_{n_k} \xrightarrow{\Omega} f$ , 那么称  $\mathcal{F}$  是正规族.

**注 1.3.3** 紧集上一致收敛的等价定义: 对上述  $\{f_n\}$  和  $g$ , 若对  $\Omega$  的紧子集列  $(K_m)$ ,  $m \geq 1$  且  $\cup_{m \geq 1} K_m = \Omega$  有 (1-4) 成立, 则  $\{f_n\}$  在紧 (子) 集上一致收敛到  $g$ . 若对任意  $m \geq 1$  还有  $K_m \subset K_{m+1}^0$ , 则称该紧子集列为  $\Omega$  的一个**穷竭** (Exhaustion).

穷竭是否存在呢? 下述命题给出了肯定的答案.

**命题 1.3.4** 对任何复平面中的开集  $\Omega$ , 它的穷竭一定存在.

证明: 若  $\Omega$  有界, 令  $K_l = \{z \in \Omega \mid d(z, \partial\Omega) \geq 1/l\}$  则  $\{K_l\}$  就是  $\Omega$  的一个穷竭. 若  $\Omega$  无界, 令  $K_l = \{z \in \Omega \mid d(z, \partial\Omega) \geq 1/l \text{ 且 } |z| \leq l\}$  即可.  $\square$

紧集上的一致收敛有什么好处呢? 我们接下来慢慢体会.

**定理 1.3.5** 若对定义在  $\Omega$  上的解析函数列  $\{f_n\}$ , 存在定义在  $\Omega$  上的函数  $f$  使得  $f_n \xrightarrow{\Omega} f$ , 那么  $f$  在  $\Omega$  内解析.

证明: (法一) 由  $f_n \xrightarrow{\Omega} f$ , 对任意含于  $\Omega$  内对三角形闭曲线  $T$ , 有:

$$0 = \int_T f_n(z) dz \rightarrow \int_T f(z) dz.$$

因此

$$\int_T f(z) dz = 0.$$

由 Morera 定理 (定理 1.1.2) 立即得  $f$  在  $\Omega$  内解析.

(法二) 这里再给出一种利用 Cauchy 积分公式证明上述定理的办法.

任取  $\zeta_0 \in \Omega$ , 对某个  $R > 0$ , 有  $\{z \mid |z - \zeta_0| \leq R\} \subset \Omega$ . 于是对  $|\omega - \zeta_0| \leq R/2$ , 有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\zeta_0|=R} \frac{f_n(z)}{z-\omega} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\zeta_0|=R} \frac{f(z)}{z-\omega} dz \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-\zeta_0|=R} \frac{f_n(z) - f(z)}{z-\omega} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi R} \sup_{|z-\zeta_0|=R} |f_n(z) - f(z)| 2\pi R \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| f_n(\omega) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\zeta_0|=R} \frac{f(z)}{z-\omega} dz \right| = 0.$$

即:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\zeta_0|=R} \frac{f(z)}{z-\omega} dz.$$

再由注 1.1.5 (3) 及  $\zeta, \omega$  的任意性, 得  $f$  在  $\Omega$  内解析.  $\square$

**注 1.3.6** 该定理的条件还可以弱化. 设  $\Omega_n, n \in \mathbb{N}^+$  和  $\Omega$  分别是复平面中的区域, 且任意  $z \in \Omega$ , 存在  $n_z \in \mathbb{N}^+$ , 使得  $z \in \Omega_n$  对所有  $n \geq n_z$  都成立. 则有如下定理 (它来自 Weierstrass) :

设  $\{f_n(z)\}$  为函数列, 满足:  $f_n(z)$  在区域  $\Omega_n$  上解析, 且  $f_n \xrightarrow{\Omega} f$ , 那么  $f$  在  $\Omega$  上解析. 用类似的办法, 我们还可以得到: 对任意  $m \in \mathbb{N}^+, f_n^{(m)} \xrightarrow{\Omega} f^{(m)}$ . (习题 2.)

由此可以得到如下令人惊奇的结果:

**定理 1.3.7 (Hurwitz 定理)** 设定义在  $\Omega$  上的解析函数列  $f_n$  恒不为 0. 若  $f_n \xrightarrow{\Omega} f$ , 那么  $f \equiv 0$  或者  $f$  在  $\Omega$  上恒不为 0.

**证明:** 由定理 1.3.5 知  $f$  在  $\Omega$  上解析, 从而其零点是孤立的. (不熟悉这一结论的同学可以查阅 [1] 第二章第 4 节). 不妨设  $f$  有零点  $z_0$  且不恒为 0, 那么存在  $R > 0$ , 使得  $f(z) \neq 0, \forall z \in \{z \mid 0 < |z - z_0| \leq R\}$  且  $\inf_{|z-z_0|=R} |f(z)| = \delta > 0$ .

由  $\|f_n - f\|_{|z-z_0|=R} \rightarrow 0$  及  $\inf_{|z-z_0|=R} |f(z)| = \delta > 0$ , 得: 当  $n \rightarrow \infty$  时

$$\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right\|_{|z-z_0|=R} \rightarrow 0.$$

记  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$ , 则由注 1.3.6, 得: 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\|f'_n - f'\|_{\Gamma} \rightarrow 0$ .

再由  $\inf_{|z-z_0|=R} |f(z)| = \delta > 0$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时, 有

$$\left\| \frac{f'_n}{f_n} - \frac{f'}{f} \right\|_{\Gamma} \rightarrow 0.$$

因此,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \rightarrow 0.$$

由辐角原理立即得  $f$  在  $\Gamma$  内没有零点, 矛盾! □

让我们着手考虑这一节的主要结论.

**定理 1.3.8** 设  $\mathcal{F}$  是一族定义在  $\Omega$  上的解析函数, 则以下两条等价:

(i) 对任意  $K \subset \Omega$ , 有  $\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_K < \infty$ .

(ii) 对任意函数列  $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ , 存在子列  $\{f_{n_j}\}$  和函数  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  使得  $f_{n_j} \xrightarrow{\Omega} f$ .

在证明它之前, 先耐心证明一个引理:

**引理 1.3.9** 若定义在  $\Omega$  上的函数族  $\mathcal{F}$  满足上述定理中的条件 (i), 那么任给  $K \Subset \Omega$  和  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对任意  $z, z' \in K$  且  $|z - z'| < \delta$  和任意  $f \in \mathcal{F}$  有:

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon.$$

**证明:** 对给定的  $K \Subset \Omega$ , 存在  $r > 0$ , 使得  $D_{3r}(z) \subset \Omega, \forall z \in K$  (这是根据紧集的定义). 设  $z, w \in K$  且  $|z - w| < r$ , 用  $\gamma$  表示圆盘  $D_{2r}(w)$  的边界. 由 Cauchy 积分公式 (定理 1.1.3) 得:

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right) d\zeta. \quad (1-5)$$

而

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right| = \frac{|z - w|}{|\zeta - z||\zeta - w|} \leq \frac{|z - w|}{r^2},$$

因此

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi 2r}{r^2} M |z - w| = \frac{2M}{r} |z - w|.$$

其中,  $M$  是函数族  $\mathcal{F}$  在与  $\Omega$  的紧子集  $K$  距离不超过  $2r$  的紧集上的一致上界. 因此结论得证.  $\square$

我们现在证明定理 1.3.8.

证明: 难点在于 (i)  $\Rightarrow$  (ii), 先证另一部分.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) 反证法. 若 (i) 不成立, 那么存在函数列  $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$  和  $\Omega$  的紧子集  $K_0$ , 使得当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\|f_n\|_{K_0} \rightarrow \infty.$$

由 (ii), 存在  $\{f_n\}$  的子列  $\{f_{n_j}\}$  和函数  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  使得  $\|f_{n_j} - f\|_{K_0} \rightarrow 0$ . 注意到对  $\{f_{n_j}\}$ , 上式依然成立. 但  $\|f_{n_j}\|_{K_0} \leq \|f_{n_j} - f\|_{K_0} + \|f\|_{K_0}$  有界, 矛盾!

(i)  $\Rightarrow$  (ii) (Montel 定理) 同往常一样, 设  $\{f_n\}$  是  $\mathcal{F}$  中的函数列,  $K \Subset \Omega$ . 取  $\Omega$  上的一列可数的稠密点集  $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ .

由  $\{f_n\}$  一致有界知: 存在其子列  $\{f_{n,1}\} = \{f_{1,1}, \dots, f_{n,1}, \dots\}$ , 使得  $\{f_{n,1}(w_1)\}$  收敛. 对于函数列  $\{f_{n,1}\}$ , 同理我们可以取出子列  $\{f_{n,2}\}$ , 使得  $\{f_{n,2}(w_2)\}$  收敛. 重复此步骤, 得一系列函数列  $\{f_{n,k-1}\}$  的子列  $\{f_{n,k}\}$ , 使得  $\{f_{n,k}(w_k)\}$  收敛. ( $k = 1, 2, \dots$ )

令  $g_n = f_{n,n}$  (对角子列), 则  $g_n$  在所有  $w_j$  上收敛. 由引理 1.3.9 知对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对任意  $z, z'$  满足  $|z - z'| < \delta$  和任意  $f \in \mathcal{F}$ , 有  $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ . 从而对任意  $z \in K$ , 由  $\{w_j\}$  的稠密性, 得存在  $k \in \mathbb{N}^+$ , 使得  $|z - w_k| < \delta$ . 于是对充分大的  $n, m$  有:

$$\begin{aligned} |g_n(z) - g_m(z)| &\leq |g_n(z) - g_n(w_k)| + |g_n(w_k) - g_m(w_k)| + |g_m(w_k) - g_m(z)| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

从而  $g_n$  在  $K$  上收敛, 记收敛到函数  $g$ .

实际上, 该收敛是一致的. 因为  $K \subset \cup_{z \in K} B(z, \delta)$ , 再由  $K$  紧, 得: 存在有限个  $z_1, \dots, z_k$ , 使得  $K \subset \cup_{1 \leq i \leq k} B(z_i, \delta)$ . 于是对任意  $z \in K$ ,

$$\begin{aligned} |g(z) - g_n(z)| &= \lim_{m \rightarrow \infty} |g_m(z) - g_n(z)| \\ &\leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} (|g_m(z) - g_m(z_k)| + |g_m(z_k) - g_n(z_k)| + |g_n(z_k) - g_n(z)|) \\ &\leq \varepsilon + \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} |g_m(z_k) - g_n(z_k)| + \varepsilon \end{aligned}$$

$$= 2\varepsilon + |g(z_k) - g_n(z_k)| \quad (*)$$

而对每个  $z_k$ , 存在  $N_k \in \mathbb{N}^+$ , 使得当  $n > N_k$  时,  $|g_n(z_k) - g(z_k)| < \varepsilon$ . 故取  $N = \max_{1 \leq i \leq k} N_i$ , 则  $(*) \leq 3\varepsilon$ . 由此,  $g_n$  在  $K$  上一致收敛到  $g$ , 于是  $g$  解析.

最后, 我们故技重施, 再取一次对角子列. 设  $\{K_n\}$  是  $\Omega$  的一个穷竭, 取上述  $K = K_1$ , 记  $\{f_n\}$  的子列  $\{g_{n,1}\}$  在  $K_1$  上一致收敛到  $g$ . 从函数列  $\{g_{n,1}\}$  中提取子列  $\{g_{n,2}\}$  在  $K_2$  上一致收敛到  $\tilde{g}$ . ( $\tilde{g}|_{K_1} = g$ , 简洁起见把  $\tilde{g}$  仍记做  $g$ ). 重复此步骤. 同理, 得  $f_n$  的子列  $\{g_{n,n}\}$  在  $\Omega$  的紧子集上一致收敛 (注1.3.3).  $\square$

**注 1.3.10** 这里给出几个注记.

- (1) 对满足引理1.3.9中结论的函数族  $\mathcal{F}$  称其**等度连续** (Equi-continuous); 对满足上述定理中条件 (i) 的函数族  $\mathcal{F}$  称其在**紧子集上一致有界**; 对满足条件 (ii) 的函数族  $\mathcal{F}$ , 称其**列紧**.
- (2) 选取对角子列的技巧, 在后续分析课程 (如泛函分析) 学习过程中会经常遇到, 请同学们仔细体会!

实际上, 上述定理中的 (i) $\Rightarrow$ (ii) 可以由泛函分析中的 Arzela-Ascoli **定理** (见 [3] 第一章第 3 节) 直接得到, 即: 定义在紧致度量空间  $M$  上的连续函数族  $\mathcal{F}$  列紧等价于其等度连续且一致有界. 由引理1.3.9我们看到: 对紧集上的解析函数族而言, 一致有界包含了等度连续. (关于度量空间和解析函数空间的讨论, 可以查阅 Conway 书 [4] 中第七章.)

但从拓扑向量空间的观点看 (感兴趣的同学请查阅 [13] 前两章), 正规族的定义就显得没那么必要了.

设拓扑空间  $(X, \tau)$  中子集  $A$  满足: 对任意点列  $\{x_n\} \subset A$ , 存在  $\{x_n\}$  的子列  $\{x_{n_k}\}$  及  $x_0 \in X$ , 使得当  $k \rightarrow \infty$  时, 有  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ , 那么称  $A$  是**列紧**的. 值得注意的是, 在 Bogachev 书 [13] 中列紧集要求上述  $x_0 \in A$ , 这里所说的列紧集则相当于该书中的**预列紧集**, 即  $\bar{A}$  ( $A$  的闭包) 是列紧集的子集.

记定义在开集  $\Omega$  上的解析函数全体构成的集合为  $H(\Omega)$ . 对任意  $K \Subset \Omega$ , 定义

$$P_K : H(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad f \mapsto \|f\|_K.$$

则  $P_K$  是一族半范数, 且这一族半范数定义了  $H(\Omega)$  上的一种拓扑  $\tilde{\tau}$ , 使得函数

$$\begin{aligned} H(\Omega) \times H(\Omega) &\rightarrow H(\Omega) & \mathbb{C} \times H(\Omega) &\rightarrow H(\Omega) \\ (f, g) &\mapsto f + g & (k, f) &\mapsto kf \end{aligned}$$

都是连续的 (我们称满足这个条件的空间为**拓扑向量空间**). 在  $(H(\Omega), \tilde{\tau})$  上, 函数列  $f_n$  收敛到  $f$  就等价于本节中的  $f_n \xrightarrow{\Omega} f$ , 从而正规族就相当于这个拓扑下的列紧集.

## 1.4 单连通和黎曼球面

这一小节我们将介绍黎曼球面和三种定义的单连通性之间的联系, 希望使大家对单连通性有更清晰的认识, 也为黎曼映照定理做铺垫. 若不加说明, 这一小节中  $\Omega$  均表示区域 (连通开集).

**扩充复平面 (复数)** 即添加了无穷远点  $\infty$  的复平面 (复数), 记为  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . 为什么无穷远点只有一个呢? 实际上, 我们考虑的是一点紧致化. 我们知道, 利用球极投影可以构造球面  $S^2$  去掉一点与欧氏平面  $\mathbb{R}^2$  的同胚, 而  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ , 这样一来扩充复平面就可以看作  $S^2$ , 也就是所谓的**黎曼球面**.

对于扩充复数, 规定如下运算: 对任意  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z + \infty = \infty$ ,  $z/\infty = 0$ . 若  $z \neq 0$ , 规定:  $z \cdot \infty = \infty$ ,  $z/0 = \infty$ . 另外,  $\infty \cdot \infty = \infty$ ,  $\infty/0 = \infty$  但  $\infty \pm \infty$ ,  $0/0$  和  $0 \cdot \infty$  没有定义. 注意, 扩充复数不构成域, 因为  $\infty$  没有乘法逆.

值得注意的是, 在黎曼球面上看, 有理函数  $f(z) = g(z)/h(z)$  (其中  $g(z)$  和  $h(z)$  是关于  $z$  的多项式) 都是连续的. 若把黎曼球面当作复流形, 实际上这些函数是黎曼球面到自身的解析函数. 可以证明, 黎曼球面上的解析自同构有且只有分式线性变换:

$$f(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \quad (1-6)$$

其中  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  且  $ad - bc \neq 0$ . 即分式线性变换对应的矩阵  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ .

在拓扑学中, 我们已经接触过**流形 (Manifold)** 这个概念.  $n$  维 (拓扑) 流形即局部同胚于欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  的 Hausdorff 空间. **微分流形** 即是具有微分结构的流形. 这个微分结构就是一系列坐标卡 (即开集和对应的坐标函数), 使得: 局部来看每个坐标卡都相当于  $\mathbb{R}^n$  中的开集, 且坐标卡之间“相容” (即坐标卡之间的坐标变换满足一定可微性质, 如  $C^r$  或  $C^\infty$ ), 共同把流形完整地拼接起来. **复流形** 则是具有复结构的微分流形, 我们要求坐标卡之间的坐标变换是解析的.

关于复流形的讨论可以查阅 [12] 第九章. 这里, 我们只谈黎曼球面. 黎曼球面上定义两个坐标卡  $(U_1, = \mathbb{C}, f_1(z) = z)$  和  $(U_2 = \mathbb{C}^* \setminus \{0\}, f_2(z) = 1/z)$ , 因为坐标变换是解析的, 所以它构成一个一维复流形. 从拓扑角度讲, 黎曼球面是复平面的一点紧致化. 不仅如此, 它还具有复结构, 使球面上每点附近有一个与复平面共形等价的邻域.

另外, 黎曼球面也可以定义为**复射影直线**. 在  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  上定义等价关系  $\sim$ :

$$(\alpha, \beta) \sim (\gamma, \eta) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ s.t. } (\alpha, \beta) = \lambda(\gamma, \eta).$$

我们将  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  在等价关系  $\sim$  下的商空间记为  $\mathbb{C}P^1$ , 用中括号  $[\alpha, \beta]$  表示其中的元

素. 考虑如下映射

$$p: \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad (z_1, z_2) \mapsto \begin{cases} z_1/z_2 & \text{if } z_2 \neq 0, \\ \infty & \text{if } z_2 = 0. \end{cases} \quad (1-7)$$

则

$$p(z_1, z_2) = p(z'_1, z'_2) \Leftrightarrow (z_1, z_2) \sim (z'_1, z'_2).$$

实际上, 根据商流形定理 (见 [7] 第二十一章第 1 节), 我们有  $\mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{C}^*$ .

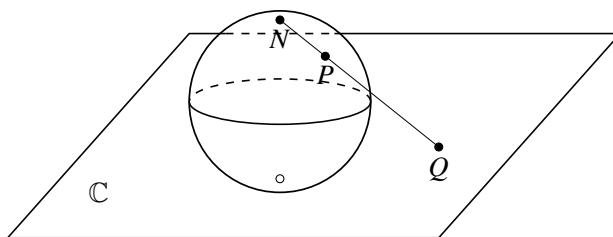


图 1.4.1 球极投影

最后, 我们利用球极投影来推导黎曼球面上的度量. 设  $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$  (图中点 Q), 令  $Z = (x_1, x_2, x_3)$  (图中点 P) 为黎曼球面

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

上的对应点. 经过  $S$  上北极点  $N = (0, 0, 1)$  的和  $z$  的直线为  $tN + (1-t)z, t \in \mathbb{R}$ . 从而, 根据直线与黎曼球面  $S$  相交时  $t$  的值我们就可以解出  $Z$  的坐标. 把直线方程代入  $S$  的方程, 注意到  $t \neq 1$ , 计算得:

$$t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

从而,

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

也即

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

对任意  $z, z' \in \mathbb{C}^*$ , 定义两者的距离为它们对应黎曼球面上的点在  $\mathbb{R}^3$  中的欧式距离. 计算得:

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{[(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (1-8)$$

若  $z' = \infty$ , 则

$$d(z, \infty) = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

(1-8) 式中, 当  $z' \approx z$  时, 将  $z - z'$  视作  $dz$ , 上式即  $|ds| = \frac{2|dz|}{1+|z|^2}$ . 用流形的语言写出来, 即为

$$ds^2 = \left( \frac{2}{1 + |\zeta|^2} \right)^2 |d\zeta|^2. \quad (1-9)$$

其局部实坐标的形式为

$$ds^2 = \frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2} (du^2 + dv^2). \quad (1-10)$$

这就是说, 在无穷小意义下, 利用球极投影定义的度量和  $\mathbb{R}^3$  上的欧氏度量对  $\mathbb{R}^2$  到  $\mathbb{R}^3$  的映射

$$F(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

的拉回度量 (Pullback Metric) (见 [7] 第十三章第 1 节) 是等价的.

让我们把目光移回到连通性上. 我们首先用同伦来定义单连通. (不熟悉同伦的同学, 请查阅 [1] 第三章第 5 节或 [5] 第四章第 1 节.)

**定义 1.4.1 (单连通)** 给定  $\Omega$  内任意两点, 若在  $\Omega$  内任意两条分别以该两点为起、终点的曲线同伦, 则称  $\Omega$  单连通.

现在, 我们可以把 Cauchy 定理推广到单连通区域来.

**定理 1.4.2** 设  $f$  在开集  $\Omega$  上解析, 连续曲线  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$  同伦, 那么

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz. \quad (1-11)$$

证明这个定理的关键在于证明如果两条起、终点相同的曲线足够接近, 那么  $f$  在这两条曲线上的积分相同.

**证明:** 设连续函数  $H(s, t) = \gamma_s(t)$  为连接  $\gamma_0$  和  $\gamma_1$  的一个同伦映射. 记  $K = H([0, 1] \times [0, 1])$ , 则  $K$  紧 (连续函数把紧集映成紧集, 想一想为什么?). 于是存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $D_{3\varepsilon}(z) \subset \Omega, \forall z \in K$ . 由紧集上的连续函数一致连续知: 存在  $\delta$ , 使得对任意  $|s_1 - s_2| < \delta$  有

$$\sup_{t \in [0, 1]} |\gamma_{s_1}(t) - \gamma_{s_2}(t)| < \varepsilon.$$

固定满足  $|s_1 - s_2| < \delta$  的  $s_1$  和  $s_2$ . 取  $K$  的开覆盖  $\cup_{z \in K} D_{2\varepsilon}(z)$ , 则它有有限子覆盖  $\{D_0, D_1, \dots, D_n\}$ . 分别取  $\gamma_{s_1}$  和  $\gamma_{s_2}$  上的  $(n+1)$  个点  $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$  和  $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ ,

使得

$$z_i, z_{i+1}, w_i, w_{i+1} \in D_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

不失一般性, 取  $z_0 = w_0 = \gamma_0(0)$  和  $z_{n+1} = w_{n+1} = \gamma_1(1)$  (这族曲线共同的起、终点). 在每个圆盘  $D_i$  上, 令  $F_i$  为解析函数  $f$  的原函数 (不熟悉解析函数原函数存在性的同学请回顾 [1] 第二章第 1 节). 在圆盘  $D_i$  和  $D_{i+1}$  相交的部分,  $F_i$  和  $F_{i+1}$  至多相差一个常数, 记为  $c_i$ . 因此

$$F_{i+1}(z_{i+1}) - F_{i+1}(w_{i+1}) = F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

从而

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{s_1}} f(z) dz - \int_{\gamma_{s_2}} f(z) dz &= \sum_{i=0}^n [F_i(z_{i+1}) - F_i(z_i)] - \sum_{i=0}^n [F_i(w_{i+1}) - F_i(w_i)] \\ &= \sum_{i=0}^n F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1}) - (F_i(z_i) - F_i(w_i)) \\ &= F_n(z_{n+1}) - F_n(w_{n+1}) - (F_0(z_0) - F_0(w_0)) \\ &= 0. \quad (\text{根据 } z_0, w_0, z_{n+1}, w_{n+1} \text{ 的定义.}) \end{aligned}$$

将区间  $[0, 1]$  分割为长度小于  $\delta$  的区间  $[s_i, s_{i+1}]$ , 重复上述步骤, 即得 (1-11) 式.  $\square$

由此我们还可以得到: 任何在单连通区域上的解析函数都有原函数 (因为积分与路径无关). 另外, 根据单连通性的定义自然推知 Cauchy 定理在单连通区域上都成立.

我们再给出两种单连通性的定义.

**定义 1.4.3 (扩充) 复平面意义下的单连通** 若  $(\mathbb{C}^* \setminus \Omega) \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$  连通, 则称  $\Omega$  在 (扩充) 复平面意义下单连通, 这里简称为  $(\mathbb{C}^*) \mathbb{C}$  单连通, 记  $\mathbb{C} \setminus \Omega = \Omega^c$ ,  $\mathbb{C}^* \setminus \Omega = (\Omega^c)^*$ .

**定义 1.4.4 (解析单连通)<sup>[1]</sup>** 若对任意  $\Omega$  内的闭曲线  $\gamma$  和定义在  $\Omega$  上的解析函数  $f$ , 有

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

则称  $\Omega$  解析单连通.

这三种定义有什么关联呢? 实际上, 有如下事实:

**定理 1.4.5** 若  $\Omega$  是  $\mathbb{C}$  中的区域, 则  $\Omega$  单连通等价于其  $\mathbb{C}^*$  单连通, 也等价于其解析单连通.

[1]. 这里将 Stein 书 [1] 中第 231 页“holomorphically simply connected”暂译为“解析单连通”.

证明: 单连通性与  $\mathbb{C}^*$  连通性等价的证明需要用到 Čech 同调的知识, 已超出了本笔记的范围, 见 [8]. 解析单连通性和单连通性等价的证明在下述讨论中.  $\square$

我们将证明

**定理 1.4.5'** 如果  $\Omega$  是复平面中的区域, 那么

- (i) 解析单连通等价于单连通.
- (ii) 若  $\Omega$  有界, 那么  $\mathbb{C}$  单连通等价于单连通, 也等价于对任意  $\Omega$  内的分段光滑闭曲线  $\gamma$  和任意  $z \notin \Omega$ , 卷绕数  $W_\gamma(z) = 0$ .

在证明它之前, 先引入卷绕数 (Winding Number) 的概念. 如果  $\gamma$  是复平面中分段光滑的闭曲线, 点  $z$  不在  $\gamma$  上, 那么我们可以通过计算当  $\zeta$  绕  $\gamma$  一圈时  $\zeta - z$  辐角的变化来计算  $\gamma$  缠绕点  $z$  的圈数. 把这种想法严格写下来, 即:

**定义 1.4.6 (卷绕数)** 设  $\gamma$  为分段光滑闭曲线.  $\gamma$  对于点  $z \notin \gamma$  的卷绕数为:

$$W_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

根据定义, 自然有下述结果:

**引理 1.4.7** 设  $\gamma$  是复平面中分段光滑的闭曲线, 我们有:

- (i) 若  $z \notin \gamma$ , 则  $W_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ .
- (ii) 若  $z$  和  $w$  属于  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  中的同一个开连通分支, 则  $W_\gamma(z) = W_\gamma(w)$ .
- (iii) 如果  $z$  属于  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  中的无界连通分支, 那么  $W_\gamma(z) = 0$ .

证明: 对 (i), 设  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , 令

$$G(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds.$$

那么  $G$  连续且除至多有限个点外可导, 且

$$G'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}.$$

于是, 除至多有限个点外, 函数  $H(t) = (\gamma(t) - z)e^{-G(t)}$  的导数为 0. 从而连续函数  $H$  为常值函数. 令  $t = 0$ , 注意到  $\gamma$  闭, 得

$$1 = e^{G(0)} = c(\gamma(0) - z) = c(\gamma(1) - z) = e^{G(1)} \Rightarrow W_\gamma(z) \in \mathbb{Z}, \text{ 其中 } c \text{ 为常数.}$$

对 (ii), 注意到  $W_\gamma(z)$  连续且恒是整数即可.

对 (iii), 由 (ii) 及  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} W_\gamma(z) = 0$  立即可得.  $\square$

有了卷绕数的性质,下面我们就来证明定理1.4.5'.

证明:

首先我们证明 (i). 由 Cauchy 定理, 单连通立即推知解析单连通. 现假设  $\Omega$  解析单连通. 由黎曼映照定理 (我们将在1.6小节证明它) 知  $\Omega$  与单位圆盘共形等价, 从而单连通.

对 (ii), 设  $\Omega$  有界. 我们将证明  $\mathbb{C}$  单连通 (1)  $\Rightarrow$  单连通 (2)  $\Rightarrow$  于是对任意  $\Omega$  内的分段光滑闭曲线  $\gamma$  和任意  $z \notin \Omega$ , 卷绕数  $W_\gamma(z) = 0$  (3)  $\Rightarrow$  单连通 (2)  $\Rightarrow$   $\mathbb{C}$  单连通 (1).

(1)  $\Rightarrow$  (2). 设  $\gamma$  是  $\Omega$  内的闭曲线,  $f$  是定义  $\Omega$  的解析函数. 由  $\Omega$  有界知

$$K = \{z \in \Omega \mid d(z, \Omega^c) \geq \varepsilon\}$$

紧, 且对充分小的  $\varepsilon$ ,  $K$  包含  $\gamma$ . 首先我们证明  $\mathbb{C} \setminus K$  连通. 若不然, 设  $K^c = C_1 \cup C_2$ , 其中  $C_1, C_2$  是非空不交开集. 令

$$F_1 = C_1 \cap \Omega^c \quad \text{and} \quad F_2 = C_2 \cap \Omega^c$$

立即得  $\Omega^c = F_1 \cup F_2$ . 由  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ , 得  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ .

下证  $F_i$  是非空闭集, 从而与  $\Omega^c$  连通矛盾. 设  $\{z_n\} \subset F_1$  收敛到  $z \in \Omega^c$  (闭), 则由  $K$  的定义知  $z \in C_1 \cup C_2$ . 若  $z \in C_2$ , 由  $C_1$  和  $C_2$  是不交开集也得矛盾, 故  $z \in C_1$ , 从而  $z \in F_1$ . 若  $F_1 = \emptyset$ , 则  $C_1 \subset \Omega^c$ . 取  $w \in C_1$ , 由  $w \notin K$ , 存在  $z \in \Omega^c$  使得  $|w - z| < \varepsilon$ , 且连接  $z$  和  $w$  的线段属于  $K^c$ . 注意到  $z \in \Omega_2$ , 这与  $K^c$  不连通矛盾. 同理知  $F_2$  也是非空闭集, 矛盾! 因此  $K^c$  连通.

由 Runge 定理,  $f$  在  $K \supset \gamma$  上可以由多项式函数一致逼近. 但对任意多项式函数  $P(z)$ , 有  $\int_\gamma P(z) dz = 0$ . 取极限即得

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

由 (i), 得  $\Omega$  单连通.

(2)  $\Rightarrow$  (3). 若  $\Omega$  单连通且  $z \notin \Omega$ , 则函数  $f(\zeta) = 1/(\zeta - z)$  在  $\Omega$  内解析. 由 Cauchy 定理立即得  $W_\gamma(z) = 0$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2). 由 (i), 只需证  $\Omega^c$  连通. 若不然, 则  $\Omega^c = F_1 \cup F_2$ , 其中  $F_1, F_2$  是非空不交闭集. 不妨设  $F_1$  有界, 则  $F_1$  紧. 设  $w \in F_1$ . 我们断言: 若把复平面分割成均匀的网格 (等正方形), 则存在有限个闭正方形区域  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ , 使得:

- (a)  $w \in Q_1^o$ ;
- (b) 若  $j \neq k$ , 则  $Q_j^o \cap Q_k^o = \emptyset$ ;
- (c)  $F_1 \subset \cup_{j=1}^n Q_j$ ;
- (d)  $\cup_{j=1}^n Q_j \cap F_2 = \emptyset$ ;
- (e)  $\cup_{j=1}^n Q_j$  的边界含于  $\Omega$  内, 且由有限条不交的简单闭多边形曲线构成.

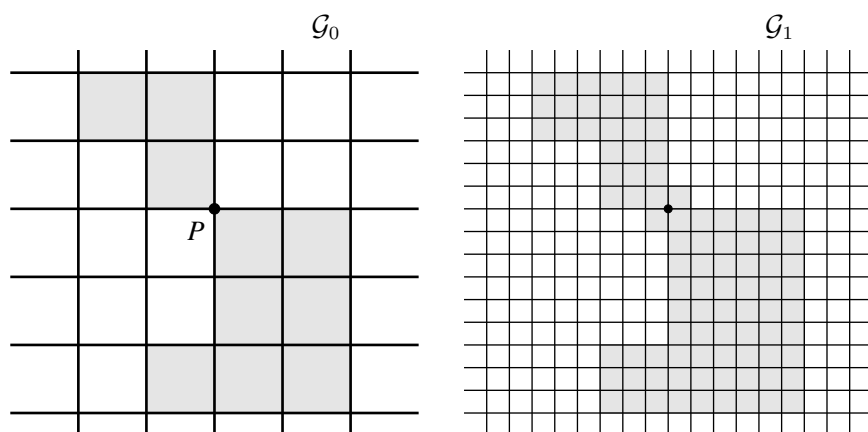


图 1.4.2 去除“不好”的边界顶点

前四条是简单的, 第五条大意是通过细分正方形网格, 去除“不好”的边界顶点, 使每个边界顶点成为“好”的, 再沿正向 (笔记中均以逆时针方向为正向) 遍历正方形区域边界即可得到多边形闭曲线. 我们现在把它仔细写下来.

由  $F_1$  紧,  $F_2$  闭, 得集合  $F_1$  和  $F_2$  的距离  $d > 0$ . 考虑复平面上的均匀正方形网格  $\mathcal{G}_0$  (正方形边长远远小于  $d$ ), 使得  $w$  落在闭正方形  $R_1$  的中心. 令  $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$  为所有与  $F_1$  相交的正方形构成的有限集, 那么  $\mathcal{R}$  满足断言中的 (a) 至 (d).

下面考虑 (e). 取  $\mathcal{R}$  中的每个正方形的正向.  $\cup_{j=1}^m R_j$  的边界则等于所有正方形各边界边 (即不包括属于  $\mathcal{R}$  中两个相邻正方形的边) 之并. 类似地,  $\cup_{j=1}^m R_j$  的边界顶点则是所有正方形的边界顶点 (即不包括属于  $\mathcal{R}$  中两个相邻正方形的边对应的顶点) 之并. 如果  $\cup_{j=1}^m R_j$  的一个边界顶点属于三条或三条以上它的边界边, 我们称这个顶点是“不好”的, 例如图中所示的  $P$  点. 为消除这些“不好”的顶点, 我们细分网格  $\mathcal{G}_0$  (记之为  $\mathcal{G}_1$ ), 把每个正方形分为九个小正方形, 增添一些小正方形, 使得这些“不好”的顶点不复存在, 如上图所示.

记  $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$  为  $\mathcal{R}$  中正方形包含的所有小正方形和新添加的小正方形组成的集合, 取  $w \in Q_1^0$ . 那么,  $\mathcal{Q}$  仍满足断言中的 (a) 至 (d). 我们现在证明  $\mathcal{Q}$  也满足 (e). 记  $[a_1, a_2]$  是定向为从边界顶点  $a_1$  到  $a_2$  的  $\cup_{j=1}^n Q_j$  的一条边界边, 那么边界顶点  $a_2$  是另一条边界  $[a_2, a_3]$  边的起点. 重复此讨论, 我们得到一系列边界边  $[a_1, a_2], [a_2, a_3], \dots, [a_n, a_{n+1}], \dots$ . 因为  $\cup_{j=1}^n Q_j$  的边界只包含有限条小正方形的边界边, 所以对某个  $n$  和  $m > n$ , 有  $a_n = a_m$ . 取最小的  $m$ , 仍记为  $m$ . 如果  $n > 1$ , 那么  $a_m$  必然是至少三条边界边的共有顶点, 矛盾! 从而  $n = 1$ , 于是边  $[a_1, a_2], [a_2, a_3], \dots, [a_m, a_1]$  构成了一条简单闭多边形曲线. 重复此步骤直至遍历  $\cup_{j=1}^n Q_j$  的边界即可.

根据断言, 考虑边界  $\partial Q_j$  的正向, 由  $w \in Q_1$  知  $w \notin Q_j$ , 对  $j > 1$ . 从而

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_j} \frac{d\zeta}{\zeta - w} = 1.$$

记  $\gamma_1, \dots, \gamma_M$  为上述 (e) 中的多边形曲线, 则

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{d\zeta}{\zeta - w} = 1.$$

从而存在  $j_0$ , 使得  $W_{\gamma_{j_0}}(w) \neq 0$ . 但  $\gamma_{j_0} \subset \Omega$ , 矛盾!

(2) $\Rightarrow$ (1). 若  $\Omega^c$  不连通, 由上述证明知存在  $\gamma \subset \Omega$  和  $w \notin \Omega$  使得  $W_\gamma(w) \neq 0$ , 从而与  $\Omega$  单连通矛盾 (因为我们已经证明了 (2) $\Leftrightarrow$ (3)).  $\square$

最后, 我们不加证明地提及 Jordan 曲线 (即简单闭曲线) 定理. 感兴趣的同学可以查阅 [5] 第四章第 6 节.

**定理 1.4.8 (Jordan 曲线定理)** 设  $\gamma$  是  $\mathbb{C}$  上一条 Jordan 曲线, 则  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  上有两个连通分支, 它们都以  $\gamma$  为边界.

## 1.5 分式线性变换

这一小节我们将回顾并更深入地讨论分式线性变换的性质, 证明推广的 Schwarz 引理. 之后, 我们还将简要介绍分式线性变换的几何性质.

考虑群  $GL(2, \mathbb{C})$  在  $\mathbb{C}^2$  上的作用: 对任意  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ , 定义

$$g \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix}.$$

容易验证: 对任意  $g_1, g_2 \in GL(2, \mathbb{C})$  和  $v \in \mathbb{C}^2$ , 有  $g_1(g_2v) = (g_1g_2)v$ ; 对任意  $\lambda \in \mathbb{C}$ , 有  $g(\lambda v) = \lambda gv$ . 从而上述定义确实是一个作用. 实际上, 这也诱导了  $\mathbb{C}^*$  上的映射  $T_g$ . 对任意  $z = p(v)$ ,  $v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  (还记得吗?  $p$  的定义在上小节 (1-7) 式.) 定义

$$T_g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad T_g p(v) = p(g(v)).$$

即:

$$T_g p(v) = \frac{ap(v) + b}{cp(v) + d} \Leftrightarrow T_g z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

从而

$$T_{g_1} T_{g_2} p(v) = T_{g_1} (p(g_2(v))) = p(g_1 g_2(v)) = T_{g_1 g_2} p(v).$$

因此

$$(T_g)^{-1} = T_{g^{-1}}, \quad T_g p(v) = p(v) \Leftrightarrow g(v) = \lambda v$$

其中  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

那么,这与单位圆盘  $\mathbb{D}$  有什么关系呢? 我们需要  $\mathbb{C}^2$  上一个**半双线性** (sesquilinear) 函数 (对第一个变量线性,对第二个变量反线性)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . 定义

$$\langle (z_1 \ z_2)^T, (w_1 \ w_2)^T \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2$$

其中  $z = (z_1 \ z_2)^T, w = (w_1 \ w_2)^T \in \mathbb{C}^2$ . 令  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , 则  $\langle Jz, w \rangle = z_1 \bar{w}_1 - z_2 \bar{w}_2$ . 此时,

$$p^{-1}(\mathbb{D}) = \{v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0, 0\} \mid \langle Jv, v \rangle < 0\}. \quad (1-12)$$

我们有如下事实:

**定理 1.5.1** 设  $g \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ , 则  $T_g \in \text{Aut}(\mathbb{D}) \Leftrightarrow g^* J g = J$ , 其中  $g^*$  是矩阵  $g$  的共轭转置.

证明: 若  $T_g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , 根据习题3., 存在  $\theta \in \mathbb{R}$  和  $z_0 \in \mathbb{D}$ , 使得

$$T_g = e^{i\theta} \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}.$$

即

$$g = \frac{1}{\sqrt{e^{i\theta} (1 - |z_0|^2)}} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ \bar{z}_0 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算即得  $g^* J g = J$ .

反之, 若  $g^* J g = J$ , 则由 (1-12) 得: 对任意  $\xi \in p^{-1}(\mathbb{D})$ , 有

$$\langle Jg\xi, g\xi \rangle = \langle g^* J g \xi, \xi \rangle = \langle J\xi, \xi \rangle < 0 \Rightarrow T_g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}.$$

同理, 由  $(g^{-1})^* J g^{-1} = J$  得:  $T_g^{-1}(\mathbb{D}) = T_{g^{-1}}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ . 因此  $T_g : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$  是双射, 由定义知  $T_g, T_{g^{-1}}$  解析, 即  $T_g \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ . □

**注 1.5.2** 集合

$$\{g \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \mid g^* J g = J\} := \text{U}(1, 1)$$

在矩阵乘法下构成一个群. 若记  $I_2$  为 2 阶单位矩阵, 则有同构:

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) \cong \text{U}(1, 1) / \{\pm I_2\}.$$

我们知道, 存在从单位圆盘到上半平面的共形映射

$$\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H} := \{\text{Im}z > 0\}, \quad z \mapsto \frac{z - i}{z + i}.$$

其对应的矩阵为  $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ , 记为  $f$ . 那么, 从上半平面到自身的解析自同构群即为:

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = \{T_{f^{-1}} \circ T_g \circ T_f \mid g \in \mathbb{U}(1, 1)\} = \{T_{f^{-1}gf} \mid g^* J g = J\}.$$

令  $h = f^{-1}gf$ , 我们有  $(fhf^{-1})^* J fhf^{-1} = J \Leftrightarrow h^*(f^* J f) h = f^* J f$ . 注意到  $f^* J f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 得  $h \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ . 因此

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) \cong \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm I_2\}.$$

其中,  $I_2$  为 2 阶单位矩阵.

值得注意的是, 这里的同构不完全是把分式线性变换与映射对应的矩阵照搬! 例如,  $f(z) = 2z \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ , 但在同构下它对应的矩阵是  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ .

现在我们来证明推广的 Schwarz 引理.

**定理 1.5.3** 设  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  解析,  $z_0 \in \mathbb{D}$ , 则

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right| \quad (1-13)$$

且

$$|f'(z_0)| (1 - |z_0|^2) \leq 1 - |f(z_0)|^2. \quad (1-14)$$

上两式等号成立均当且仅当  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .

证明: 考虑

$$0 \xrightarrow{g} z_0 \xrightarrow{f} f(z_0) \xrightarrow{h} 0.$$

其中

$$g(z) = \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}, \quad h(z) = \frac{z - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}z}.$$

从而由 Schwarz 引理 (定理 1.2.2) 得:

$$|w| \geq |(h \circ f \circ g)(w)|$$

令  $w = g^{-1}(z)$  即 (1-13) 式, 令  $z \rightarrow z_0$  取极限即得 (1-14) 式. Schwarz 引理告诉我们, 上两式等号成立均当且仅当  $h \circ f \circ g$  是旋转变换, 故当且仅当  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ .  $\square$

我们再简要回顾一些分式线性变换的几何性质. 这部分内容主要参考 [9].

分式线性变换都可以看作平移变换、旋转变换、伸缩变换和反演变换 ( $w = 1/z$ ) 的复合. 因此, 这四类分式线性变换共同的几何性质便可以推广到任意分式线性变换上. 有下列事实 (不熟悉圆周方程、对称点关系的同学请查阅 [9] 第一章第 5、6 节) :

**定理 1.5.4** 分式线性变换把圆周变为圆周.

**证明:** 只需证反演变换的情形. 给定圆周

$$\Gamma : Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0,$$

其中  $A, C \in \mathbb{R}$ ,  $|B|^2 - AC > 0$ . 其在反演变换下的方程为

$$\Gamma' : Cw\bar{w} + \bar{B}\bar{w} + Bw + A = 0,$$

从而  $\Gamma'$  为圆周. □

**推论 1.5.5** 若分式线性变换把圆周  $\Gamma_1$  变为圆周  $\Gamma_2$ , 则它把关于  $\Gamma_1$  的一对对称点映为关于  $\Gamma_2$  的一对对称点.

**证明:** 注意到关于圆周  $\Gamma_1 : Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$  的对称点  $z_1, z_2$  满足

$$Az_1\bar{z}_2 + \bar{B}z_1 + B\bar{z}_2 + C = 0$$

即可. □

**定理 1.5.6** 在复平面上给定圆周  $\Gamma_1$  及其定向表示  $(z_1, z_2, z_3)$  和圆周  $\Gamma_2$  及其定向表示  $(w_1, w_2, w_3)$ , 则存在唯一分式线性变换  $f(z)$ , 满足

$$w_i = f(z_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

**证明:** 存在性: 令

$$f_1 = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)},$$

则分式线性变换  $f_1$  把  $z_1, z_2, z_3$  分别映到  $0, 1, \infty$ . 同理, 令

$$f_2 = \frac{(z - w_1)(w_2 - w_3)}{(z - w_3)(w_2 - w_1)},$$

则分式线性变换  $f_2$  把  $w_1, w_2, w_3$  分别映到  $0, 1, \infty$ . 令  $f = f_2^{-1} \circ f_1$  即可.

**唯一性:** 若存在分式线性变换  $g$  也满足条件, 则  $f \circ g^{-1}$  有三个不动点, 从而只能为常值函数. □

**思考:** 在上述证明中, 为什么不可以任意调换  $z_1, z_2, z_3$  或  $w_1, w_2, w_3$  的顺序? 分式线性变换虽然保证把圆周变成圆周, 但不一定把圆周的内部映射到圆周的内部, 也可能映到圆周的外部, 所以这三个点的顺序很重要.

上面的证明其实暗含了分式线性变换保交比的性质. 我们先给出交比 (Cross Ratio) 的定义.

**定义 1.5.7 (交比)** 给定四个不同的有序点  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , 称比值

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

为四点的交比. 若上式中有一点为  $z_k = \infty$ , 则理解为  $z_k \rightarrow \infty$  时的极限.

**命题 1.5.8** 交比在分式线性变换作用下不变.

证明: 只需证明反演变换保交比, 这是容易验证的. □

分式线性变换还有如下性质:

**命题 1.5.9** 四点共圆的充要条件是交比为实数.

证明: 记由点  $z_1, z_2, z_3$  确定的圆为  $\Gamma$ . 在定理 1.5.6 的证明中, 实际上我们构造了把  $\Gamma$  变为实轴的分式线性变换 (直线在黎曼球面上为圆!), 从而  $z_4$  在圆  $\Gamma$  上当且仅当它在该分式线性变换下的像为实数, 根据命题 1.5.8 立即可得. □

## 1.6 黎曼映照定理的证明

这一小节我们首先将全力证明黎曼映照定理, 之后我们还将介绍有关共形映射在边界处的性态和反射理的基本结果.

我们先做最后的准备工作.

**引理 1.6.1** 设  $\Omega_1, \Omega_2$  为开集.  $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  为解析单射. 则: 对任意  $z \in \Omega_1, f'(z) \neq 0$ . 因此, 若  $f$  也是满射, 则  $f^{-1}$  也解析.

证明: 反证法. 假设存在  $z_0 \in \Omega_1$ , 使得  $f'(z_0) = 0$ . 那么, 当  $z$  和  $z_0$  充分接近时,

$$f(z) - f(z_0) = a(z - z_0)^k + G(z)$$

其中  $a \neq 0, k \geq 2$  且  $z_0$  是  $G(z)$  的  $(k+1)$  阶零点. 对充分小的  $w$ , 令  $F(z) = a(z - z_0)^k - w$ , 则

$$f(z) - f(z_0) - w = F(z) + G(z).$$

在以  $z_0$  为中心的一个小圆周上,  $|G(z)| < |F(z)|$  且  $F$  在该圆周内至少有二个零点. 从而由 Rouché 定理,  $f(z) - f(z_0) - w$  也在该圆周内至少有二个零点.

而在以  $z_0$  为中心的一个小圆周上, 当  $z \neq z_0$  时,  $f'(z) \neq 0$ . 从而  $f(z) - f(z_0) - w$  的零点各不相同, 这与  $f$  是单射矛盾! □

现在我们来证明黎曼映照定理. 它的证明来自德国数学家 Paul Koebe.

**定理 1.6.2 (黎曼映照定理)** 设  $\Omega \neq \mathbb{C}$  为复平面中的单连通区域,  $z_0 \in \Omega$ . 那么, 存在唯一共形映射  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ , 使得

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) > 0.$$

证明: 存在性: 设解析单射函数族

$$\mathcal{F} = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{D} \mid f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0\}.$$

我们的证明将分为三步:

1.  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ;
2. 存在  $f \in \mathcal{F}$ , 使得  $f'(z_0) = \sup_{g \in \mathcal{F}} g'(z_0)$ ;
3. 上步中的  $f$  是满射.

首先我们来证  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ . 取  $a \notin \mathbb{C} \setminus \Omega$ , 那么存在解析单射  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , 使得  $h^2 = z - a$ . 由  $\Omega \ni z_0$  开, 存在  $\delta > 0$ , 使得

$$h(\Omega) \supset B(h(z_0), \delta) \Rightarrow B(-h(z_0), \delta) \cap h(\Omega) = \emptyset. \quad (\text{否则 } 0 \in h(\Omega), \text{ 矛盾.})$$

于是函数  $1/[h(z) + h(z_0)]$  有界. 从而

$$\left| c \frac{h(z) - h(z_0)}{h(z) + h(z_0)} \right| \leq |c| \left( 1 + \frac{2|h(z_0)|}{\delta} \right) \quad (*)$$

取  $c$  充分小, 使得  $(*) \in \mathbb{D}$ . 取  $\theta \in \mathbb{R}$ , 使得

$$\left( c e^{i\theta} \frac{h(z) - h(z_0)}{h(z) + h(z_0)} := f_0 \right)' \Big|_{z_0} > 0.$$

上述构造的函数  $f_0 \in \mathcal{F}$ .

其次我们证明存在  $f \in \mathcal{F}$ , 使得  $f'(z_0) = \sup_{g \in \mathcal{F}} g'(z_0)$ . 注意到对任意  $f \in \mathcal{F}$  和任意  $z \in \Omega$ , 有  $|f(z)| < 1$ , 从而存在常数  $C > 0$ , 使得  $|f'(z_0)| \leq C$  恒成立. 取子列  $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(z_0) = \sup_{f \in \mathcal{F}} f'(z_0).$$

由定理 1.3.8 知: 存在子列  $\{f_{n_k}\}$  和  $f$ , 使得  $f_{n_k} \xrightarrow{\Omega} f$ .

下证  $f \in \mathcal{F}$ . 首先  $f$  解析,  $f(z_0) = 0$  且  $f'(z_0) > 0$ . 从而只需证  $f$  为单射. 若不然, 假设存在  $z_1 \neq z_2 \in \Omega$ , 使得  $f(z_1) = f(z_2)$ . 但对任意  $z \in \Omega \setminus \{z_1\}$ , 有  $f_n(z) - f_n(z_1) \neq 0$ , 从而由 Hurwitz 定理 (定理 1.3.7) 立即得矛盾.

最后, 我们证明  $f(\Omega) = \mathbb{D}$ . 若不然, 则存在  $w \notin f(\Omega)$  且  $w \in \mathbb{D}$ . 从而对任意  $z \in \Omega$ ,

$$\frac{f(z) - w}{1 - \bar{w}f(z)} \neq 0.$$

从而根据  $\Omega$  单连通, 可取函数

$$F(z) = \sqrt{\frac{f(z) - w}{1 - \overline{w}f(z)}}$$

的单值解析分支, 且由定义知  $F(z)$  是定义在  $\Omega$  上的单射. 取  $\varphi \in \mathbb{R}$ , 使得函数

$$G(z) = e^{i\varphi} \frac{F(z) - F(z_0)}{1 - \overline{F(z_0)}F(z)}$$

满足  $G'(z_0) > 0$ . 从而  $G \in \mathcal{F}$ .

注意到

$$f = \underbrace{(g_1^{-1} \circ h \circ g_2^{-1})}_{\text{记为}\psi} \circ G,$$

其中:

$$g_1(z) = \frac{z - w}{1 - \overline{w}z}, \quad h(z) = z^2, \quad g_2(z) = e^{i\varphi} \frac{z - F(z_0)}{(1 - \overline{F(z_0)}z)}.$$

由  $\psi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  解析但不属于  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ , 及定理1.5.3得

$$f'(z_0) = |\psi'(0)| |G'(z_0)| < |G'(z_0)|.$$

这与  $f$  的定义矛盾! 从而  $f(\Omega) = \mathbb{D}$ .

根据引理1.6.1, 得  $f$  是共形映射.

唯一性: 假设存在共形映射  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ , 使得  $g(z_0) = 0, g'(z_0) > 0$ . 则  $f \circ g^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , 注意到  $f \circ g^{-1}(0) = 0$  且  $(f \circ g^{-1})'(0) > 0$ , 得:  $f \circ g^{-1}(z) = z \Rightarrow g = f$ .  $\square$

**推论 1.6.3** 设  $\Omega_1, \Omega_2 \subsetneq \mathbb{C}$  是单连通区域. 若  $\text{Iso}(\Omega_1, \Omega_2)$  表示从  $\Omega_1$  到  $\Omega_2$  的解析双射构成的群, 则存在双射  $\varphi: \text{Iso}(\Omega_1, \Omega_2) \rightarrow \Omega_2 \times \{|z| = 1\}$ .

证明: 习题6.  $\square$

如果共形映射  $f$  把区域  $\Omega$  映成  $\Omega'$ , 那么  $f$  在边界处会是什么样的性态呢? 如果两个区域都是 Jordan 区域 (即边界是 Jordan 曲线的区域), 那么  $f$  可以连续开拓到  $\Omega$  的闭包上, 且把边界映到边界. 可惜这个重要定理的证明需要太多铺垫, 在此恕不证明. 感兴趣的同学请查阅 [12] 第十四章第 5 节.

**定理 1.6.4 (Carathéodory 定理)** 设  $\Omega$  是复平面中的有界区域,  $f: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  是共形映射, 那么  $f$  可以连续开拓 (保持双射) 到  $\overline{\Omega}$  上当且仅当  $\Omega$  是 Jordan 区域.

考虑如下两个例子:

◦ 设  $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ , 有共形映射  $g \circ f$ , 即

$$\mathbb{C} \setminus [0, \infty) \xrightarrow{f} \mathbb{H} \xrightarrow{g} \mathbb{D}, \quad \text{其中 } f(z) = z^{\frac{1}{2}}, \quad g(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

但它不能连续开拓到边界, 毛病就出在实轴上.

◦ 设区域

$$\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \setminus \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times \left( 0, 1 - \frac{1}{n} \right)$$

在  $\Omega$  内, 不存在连接  $O = (0, 0)$  和  $A = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$  的连续曲线, 如下图所示.

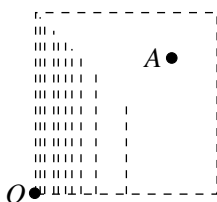


图 1.6.1 一个  $\Omega$  不是 Jordan 区域的例子

不过, 我们可以证明下述定理. (实际上, 该定理对任意连通开集间的同胚都成立, 证明也是类似的.)

**定理 1.6.5** 设  $\Omega, \Omega'$  是复平面中的区域.  $f: \Omega \rightarrow \Omega'$  是共形映射. 若  $\{z_n\}$  趋向于  $\Omega$  的边界, 则  $\{f(z_n)\}$  趋向于  $\Omega'$  的边界.

**证明:** 设  $K$  是  $\Omega'$  的紧子集, 那么  $f^{-1}(K)$  是  $\Omega$  的紧集 (我们再次用到了连续函数把紧集映成紧集.) . 由  $\{z_n\}$  趋向于  $\Omega$  的边界知: 存在  $n_0 \in \mathbb{N}^+$ , 使得  $z_{n_0} \notin f^{-1}(K)$ , 从而  $f(z_{n_0}) \notin K$ . 从而可得  $\{f(z_n)\}$  趋向于  $\Omega'$  的边界.  $\square$

最后, 我们介绍有关反射原理的两个基本结果, 利用反射原理得到关于共形映射在边界处性态更进一步的结果. 下述定理是对称原理 (见 [1], 第二章第 5 节) 的自然推广, 它们的证明思想也完全类似.

**定理 1.6.6** 设  $\Omega, \Omega'$  是复平面中的不交区域,  $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  是可求长曲线, 其中  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  为区间. 记  $\gamma((a, b)) = |\gamma|$ . 如果  $|\gamma| \subset \mathbb{C} \setminus (\Omega \cup \Omega')$ ,  $\Omega \cup |\gamma| \cup \Omega'$  为连通开集,  $f: \Omega \cup |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$  连续且  $f|_{\Omega}$  解析,  $g: \Omega' \cup |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$  连续且  $g|_{\Omega'}$  解析,  $f|_{\gamma} = g|_{\gamma}$ , 那么

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega \\ f(z) = g(z), & z \in |\gamma| \\ g(z), & z \in \Omega' \end{cases}$$

在  $\Omega \cup |\gamma| \cup \Omega'$  上解析.

证明: 首先  $f$  在  $\Omega \cup |\gamma| \cup \Omega'$  上连续. 从而只需证明  $f$  在  $|\gamma|$  上解析. 对任意  $z \in |\gamma|$ , 存在以  $z$  为中心的小开圆盘  $D$ , 使得  $D \subset \Omega \cup |\gamma| \cup \Omega'$ . 故只需证对任意  $D$  中对闭曲线  $\eta$ , 有:

$$\int_{\eta} F(z) dz = 0.$$

若  $|\eta|$  含于区域  $\Omega$  或  $\Omega'$  中的一个, 即  $|\eta| \subset \Omega$  (或  $|\eta| \subset \Omega'$ ) 那么由  $f$  或  $g$  解析即得.

若  $|\eta|$  包含了一部分  $|\gamma|$  但没有“穿过”它, 即  $|\eta| \cap |\gamma| \neq \emptyset$  且  $|\eta| \cap \Omega = \emptyset$  (或  $|\eta| \cap \Omega' = \emptyset$ ), 将  $|\eta|$  平移  $\varepsilon$  使之含于区域  $\Omega$  或  $\Omega'$  中的一个, 再令  $\varepsilon$  趋于 0 取极限即得.

若  $|\eta|$  “穿过”了  $|\gamma|$  即  $|\eta| \cap \Omega \neq \emptyset$  且  $|\eta| \cap \Omega' \neq \emptyset$ , 将它沿  $|\gamma|$  截成两部分, 则可转化为上一种情形.  $\square$

**推论 1.6.7 (Schwarz 反射原理)** 设  $\Omega$  为复平面中关于实轴对称的连通开集, 即  $z \in \Omega \Leftrightarrow \bar{z} \in \Omega$ . 记  $\Omega^+ = \Omega \cap \{\text{Im}(z) > 0\}$ ,  $\Omega^- = \Omega \cap \{\text{Im}(z) < 0\}$  和  $I = \Omega \cap \mathbb{R}$ . 若  $f$  在  $\Omega^+$  上解析, 在  $\Omega^+ \cup I$  上连续且  $f(I) \subset \mathbb{R}$ , 则

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega^+ \\ f(z) = \overline{f(\bar{z})}, & z \in I \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in \Omega^- \end{cases}$$

在  $\Omega$  上解析.

证明: 由定理 1.6.6 立即得到.  $\square$

**注 1.6.8** Schwarz 反射原理可以自然推广到区域边界为圆周时的情形. 设  $f: \{|z| \leq R\} \rightarrow \mathbb{C}$  连续, 且在  $\{|z| < R\}$  上解析. 那么根据  $\overline{f(R^2/\bar{z})}$  在  $\{|z| > R\}$  解析, 可以将  $f$  开拓到全平面.

即: 圆盘上一点  $Q$ , 其对称点  $P$  在  $OP$  的延长线上, 且满足  $|OQ| \cdot |OP| = R^2$ . 若  $P$  代表点  $z$ , 那么  $Q$  就代表点  $R^2/\bar{z}$ , 这就是上述开拓的出发点.

熟悉平面几何的同学知道, 我们称  $P$  和  $Q$  互为共轭点. 任给一点  $Q$ , 经过  $P$  点且与  $OP$  垂直的直线称为点  $Q$  对应的极线, 此时点  $Q$  称为极点. 不仅对圆, 对一般的圆锥曲线而言, 极点、极线都有许多美妙的性质.

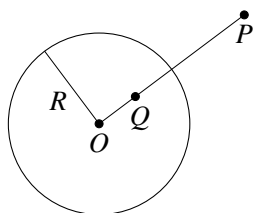


图 1.6.2 边界为圆周时的解析开拓

上述推论中的条件还可以弱化. 实际上, 重要的是  $f$  的虚部在  $I$  上恒为 0, 对其实部不需做任何要求. 因此, 结论可以推广到一般的调和函数上 (解析函数的实部和虚部都是调和函数), 即: 对上述  $\Omega$  和  $I$ , 设函数  $v(z)$  在  $\Omega^+ \cup I$  上连续, 在  $\Omega^+$  上调和, 那么  $v(z)$  可以调和开拓到  $\Omega$  上, 满足  $v(\bar{z}) = -v(z)$ . Schwarz 反射原理可以理解为  $v(z)$  为某个解析函数  $f(z)$  的虚部的情形.

考虑区域  $\Omega$  包含直线段  $\gamma$  的情形. 若直线段  $\gamma$  上每一点都存在圆形邻域, 使得该邻域与  $\partial\Omega$  的交集恰是  $\gamma$  与  $\partial\Omega$  的交集, 则称  $\gamma$  为**自由边界线段** (Free Boundary Arc). 显然, 每一点处  $\gamma$  与上述圆形邻域的交集就是圆的直径. 进一步, 若在直线段上每一点处, 上述直径截成的两个半圆形邻域中有且只有一个在  $\Omega$  内, 那么我们称  $\gamma$  是**单边边界线段** (One-sided Boundary Arc).

由此不难得到下述结果:

**定理 1.6.9** 设单连通区域  $\Omega$  的边界包含单边边界线段  $\gamma$ . 那么, 从  $\Omega$  到单位圆盘  $\mathbb{D}$  的共形映射  $f$  可以解析开拓到  $\Omega \cup \gamma$  上.  $\gamma$  的像就是单位圆周上的一段圆弧.

**证明:** 任取  $z_0 \in \gamma$ . 存在含于  $\Omega$  内, 以  $z_0$  为中心的半圆周区域  $D$ , 使得  $f(z)$  在  $D$  恒不为 0. 注意到  $\log f(z)$  在  $D$  上有解析单值分支. 注意到当  $z$  趋于直径时  $|f(z)|$  趋于 1, 根据上述讨论, 知  $\log f(z)$  可以解析开拓到整个圆周上. 因此  $f(z)$  也可以解析开拓到整个圆周上, 故其在  $z_0$  解析. 注意到开拓在圆周区域相交的部分一定相等即可.  $\square$

不过即使最顶尖的数学家也可能出错, Ahlfors 书 [2] 第六章第 1 节中该定理证明或有瑕疵, 关于这一点的讨论可以参考 [10].

## 1.7 多边形的共形映射

这一小节我们考虑  $\Omega$  是多边形区域的情形, 即  $\partial\Omega$  是不自交的闭多边形曲线. 这时  $\Omega$  到单位圆盘  $\mathbb{D}$  的共形映射可以用具体的公式给出来, 且公式中的参数只取决于多边形的形状.

设  $\Omega$  的边界是不自交的闭多边形曲线. 记它的顶点依次 (逆时针) 为  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . 多边形在顶点  $z_k$  的内角为  $\arg(z_{k-1} - z_k)/(z_{k+1} - z_k) \in (0, 2\pi)$ , 记为  $\alpha_k\pi$ , 其中  $0 < \alpha_k < 2, k = 1, 2, \dots, n$ . 记  $\alpha_k\pi$  对应的外角  $\beta_k\pi = (1 - \alpha_k)\pi$ , 其中  $-1 < \beta_k < 1$ . 则  $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = 2$ . 不难理解, 该多边形是凸多边形当且仅当所有  $\beta_k > 0$ .

设  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  为共形映射, 则由 Carathéodory 定理 (定理 1.6.4) 知  $f$  可以连续开拓到  $\bar{\Omega}$  上, 且把边界  $\partial\Omega$  映到单位圆周. 我们现在考虑  $f$  的逆映射, 即把单位圆盘映到多边形区域的共形映射. 有下述定理:

**定理 1.7.1 (单位圆盘的 Schwarz-Christoffel 公式)** 若  $F$  把单位圆盘共形地映射到内

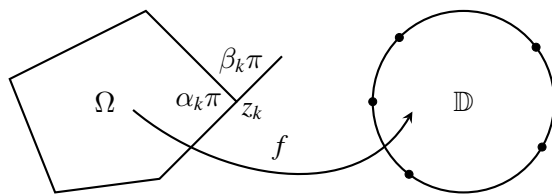


图 1.7.1 多边形的共形映射

角为  $\alpha_k\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  的多边形区域  $\Omega$ , 那么  $F$  形如

$$F(w) = C \int_0^w \prod_{k=1}^n (w - w_k)^{-\beta_k} dw + C'. \quad (1-15)$$

其中  $\beta_k = 1 - \alpha_k$ ,  $w_k$  是单位圆周上的点 ( $k = 1, 2, \dots, n$ ),  $C$  和  $C'$  是常数.

证明: 考虑共形映射  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ . 设  $S_k$  是以  $z_k$  为中心, 充分小的圆周与  $\Omega$  相交得到的扇形区域, 则存在  $\zeta = (z - z_k)^{1/\alpha_k}$  的单值解析分支, 使得它把  $S_k$  映成半圆  $S'_k$ . 选择合适的单值解析分支使  $z_k + \zeta^{\alpha_k} \in S'_k$ . 令  $g(\zeta) = f(z_k + \zeta^{\alpha_k})$ . 由  $g(\zeta)$  在原点解析得: 在原点附近有展开

$$f(z_k + \zeta^{\alpha_k}) = w_k + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \zeta^m.$$

其中  $a_1 \neq 0$ , 否则  $g(S'_k)$  不可能在单位圆盘内. 从而可以在  $w_k$  的一个邻域内, 对上述级数取逆 (关于形式级数取逆的问题, 不熟悉的同学可以查阅 [11] 第四章第 9 节):

$$\zeta = \sum_{m=1}^{\infty} b_m (w - w_k)^m,$$

其中  $w = f(z_k + \zeta^{\alpha_k})$  且  $b_1 \neq 0$ . 等式两边  $\alpha_k$  次幂, 得

$$F(w) - z_k = (w - w_k)^{\alpha_k} G_k(w)$$

其中  $G_k$  解析且在  $w_k$  的邻域内不为 0. 求导, 得:

$$F'(w)(w - w_k)^{\beta_k}$$

解析且在  $w_k$  不为 0. 因此

$$H(w) = F'(w) \prod_{k=1}^n (w - w_k)^{\beta_k}$$

解析且在闭单位圆盘内不为 0.

下证  $H(w)$  为常数.

考虑当  $w = e^{i\theta}$  在单位圆周上处于  $w_k = e^{i\theta_k}$  和  $w_{k+1} = e^{i\theta_{k+1}}$  之间的部分. 由于  $F'(e^{i\theta})$  的辐角主值等于单位圆周上  $e^{i\theta}$  处的切线和  $F$  在  $F(e^{i\theta})$  处的夹角, 这里简记

为  $\arg F' = \arg dF - \arg dw$ .  $dF$  是常数 (因为  $\Omega$  边界在相邻顶点之间是直线段), 且  $\arg dw = \theta + \pi/2$ .

注意到

$$w - w_k = e^{i\theta} - e^{i\theta_k} = 2ie^{i\frac{\theta+\theta_k}{2}} \sin\left(\frac{\theta - \theta_k}{2}\right),$$

从而它的辐角主值为  $\theta/2$  加上一个常数. 从而,

$$\arg H(w) = \arg F'(w) + \sum_{k=1}^n \beta_k \arg(w - w_k) = -\theta + \left(\sum_{k=1}^n \beta_k\right) \cdot \frac{\theta}{2} + c = c,$$

其中  $c$  为常数. 从而  $\arg H(w)$  在单位圆周上是常数. 由最大模原理 (定理1.2.1), 再注意到  $\arg H(w) = \text{Im}(\log H(w))$ , 得  $H(w)$  在闭单位圆盘上为常数. 即:

$$F'(w) = C \prod_{k=1}^n (w - w_k)^{-\beta_k},$$

其中  $C$  是常数. 对上式积分即得 (1-15) 式. □

**注 1.7.2** 对于任意给定的  $\theta_k$ , 容易验证 (1-15) 式把单位圆周到闭多边形曲线, 但通常我们无法判断这个闭多边形曲线是否自交. 如果它不自交, 不难证明 (1-15) 式把单位圆盘映到闭多边形区域, 且是双射 (提示: 利用辐角原理).

注意到上半平面到单位圆盘有共形映射

$$\varphi: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}, \quad z \mapsto \frac{z-i}{z+i} = 1 - \frac{2i}{z+i},$$

自然地, 我们可以把 Schwarz-Christoffel 公式搬到上半平面来. 设  $z_k$  是 (1-16) 式中  $w_k$  在  $\varphi$  下的原像 (若  $w_n = 1$ , 则取  $z_n = \infty$ ), 令

$$G(z) = F \circ \varphi(z).$$

则计算得

$$\begin{aligned} G'(z) &= F'(\varphi(z))\varphi'(z) \\ &= C \prod_{k=1}^n [\varphi(z) - \varphi(z_k)]^{-\beta_k} \frac{2i}{(z+i)^2} \\ &= C \prod_{k=1}^n \left[ \frac{2i(z-z_k)}{(z+i)(z_k+i)} \right]^{-\beta_k} \frac{2i}{(z+i)^2} \\ &= \begin{cases} \tilde{C} \prod_{k=1}^n (z-z_k)^{-\beta_k}, & z_n < \infty \\ \tilde{C} \prod_{k=1}^{n-1} (z-z_k)^{-\beta_k}, & z_n = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

也就是说, 我们得到了如下结果:

**定理 1.7.3 (上半平面的 Schwarz-Christoffel 公式)** 若  $F$  把上半平面共形地映射到内角为  $\alpha_k\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  的多边形区域  $\Omega$ , 那么  $F$  形如

$$F(z) = \tilde{C} \int_0^z \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{-\beta_k} dz + \tilde{C}'. \quad (1-16)$$

其中  $\beta_k = 1 - \alpha_k$ ,  $z_k \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{C}$  和  $\tilde{C}'$  是常数.

我们对  $n = 3$  的情形稍作讨论. 由定理 1.5.6 我们知道, 分式线性变换可以把单位圆周上的三个点  $w_1, w_2, w_3$  映到单位圆周上任意指定的位置. 所以在这个意义下, Schwarz-Christoffel 公式只取决于角度  $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \alpha_3\pi$ . 因此, 从上半平面到三角形区域的共形映射可以写为

$$F(z) = \int_0^z z^{\alpha_1-1} (z-1)^{\alpha_2-1} dz. \quad (1-17)$$

我们把形如 (1-17) 的函数称为 Schwarz **三角函数**.

考虑它的逆函数  $f$ . 根据反射原理, 可以将  $f$  沿三角形的边解析开拓. 我们希望经过偶数次反射以后, 反射的三角形能够与原三角形完全重叠, 从而三角形的角度满足

$$\alpha_k\pi = \frac{\pi}{n_k}, \quad \sum_{k=1}^3 \frac{1}{n_k} = 1.$$

其中  $n_k \in \mathbb{N}^+$ ,  $k = 1, 2, 3$ . 满足条件的整数组  $(n_k)$  只有  $(3, 3, 3)$ 、 $(2, 3, 6)$  和  $(2, 4, 4)$  三组, 它们分别代表正三角形、一个角为 30 度的直角三角形和等腰直角三角形. 此时, 所有反射的三角形可以密铺整个复平面 (不重复不遗漏), 它们可以看作复平面上的亚纯函数在三角形区域上的限制.

## 1.8 椭圆积分和椭圆函数 (一)

这一小节我们将讨论上半平面的 Schwarz-Christoffel 公式中多边形区域为矩形的情形, 以此引入椭圆函数和椭圆积分, 简要介绍椭圆函数的性质. 在介绍 Mittag-Leffler 定理和 Weierstrass 定理后, 我们将从级数的角度进一步介绍椭圆函数.

在 (1-16) 式中取  $n = 4$ ,  $\beta_i = 1/2, i = 1, 2, 3, 4$ , 取参数  $z_i$  分别为  $\pm 1, \pm 1/k$ , 其中  $0 < k < 1$ , 考虑

$$F(z) = \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{(1-k^2w^2)(1-w^2)}}. \quad (1-18)$$

令

$$K = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}}, \quad K' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}}. \quad (1-19)$$

容易看出,  $F$  把上半平面共形地映到下图阴影部分所示的矩形区域  $R_0$ ,  $K$  和  $K'$  分别对应矩形区域的长和宽. 图中  $O$  点为坐标原点. 由对称性知  $F$  把无穷远点映到  $iK'$ .

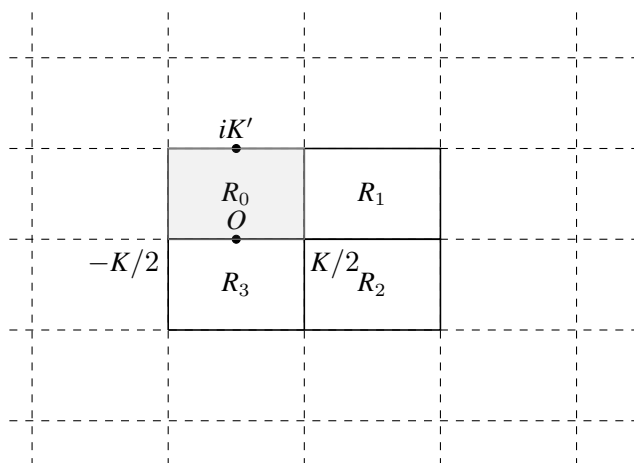


图 1.8.1  $F$  把上半平面映成的矩形区域

考虑  $F$  的逆函数  $f$ . 根据反射原理, 我们可以把  $f$  开拓到  $R_1, R_2, R_3 \dots$  直至整个复平面上 (仍记为  $f$ ), 且满足: (沿一个方向反射两次后对应点的取值和原函数相等)

$$f(z + 2K) = f(z), \quad f(z + 2iK') = f(z).$$

且  $f$  的所有零点为  $z = nK + 2miK'$ , 所有极点为  $z = (2p + 1)K + qiK'$ , 其中  $n, m, p, q \in \mathbb{Z}$ . 也就是说,  $f$  是一个双周期的亚纯函数, 我们把这样的函数称为**椭圆函数**.

设函数  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  为双周期亚纯函数, 两个 (非零) 周期分别为  $\omega_1$  和  $\omega_2$ .  $\omega_1$  和  $\omega_2$  实线性相关, 即  $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{R}$  的情形并不是我们感兴趣的, 因为若  $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{Q}$ , 则  $f$  退化为一个单周期函数; 若  $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , 则  $f$  只能为常值函数 (这是因为  $\{r\mathbb{Z}\}$ ,  $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  在实数中稠密, 即 Dirichlet 逼近定理, 不熟悉的同学可以查阅 [7] 第四章第 2 节). 故以下只考虑  $\omega_1$  和  $\omega_2$  实线性无关的情形.

记  $M$  为  $f$  所有周期构成的集合, 则任意  $\omega_1, \omega_2 \in M$ , 有  $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \in M$ , 从而  $M$  构成整数环上的一个**模 (Module)**, 称为双周期函数  $f$  的**周期模**. 注意:  $M$  是孤立点集 (因为解析函数零点都是孤立的), 由孤立点集组成的模称为**离散 (Discrete) 模**. 另外, 若  $z_2 - z_1 \in M$ , 我们称  $z_1$  和  $z_2$  模  $M$  **同余 (Congruence)**, 记作  $z_1 \equiv z_2 \pmod{M}$ . 这样一来,  $f$  便可以看作在模  $M$  的同余类上的函数.

如果  $M$  中的元素  $\omega_1, \omega_2$  满足: 对任意  $\omega \in M$ ,  $\omega$  可以唯一表示为  $\omega = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ , 那么我们称  $\omega_1, \omega_2$  构成  $M$  的一组**基 (basis)**, 记为  $(\omega_1, \omega_2)$ . 我们有:

**定理 1.8.1** 如果  $(\omega_1, \omega_2)$  与  $(\omega'_1, \omega'_2)$  分别是双周期函数  $f$  的周期模  $M$  的两组基, 那

么存在行列式绝对值为 1 的整系数二阶矩阵  $A$ , 使得

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix}.$$

证明: 由基的定义知存在整数  $a, b, c, d$  使得

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\text{记为 } A} \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix}.$$

同理, 存在整数  $a', b', c', d'$  使得

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}}_{\text{记为 } A'} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

从而

$$AA' = A'A = I_2,$$

其中  $I_2$  是二阶单位矩阵. 由  $|A||A'| = 1$  且  $|A|, |A'| \in \mathbb{Z}$ , 即得  $|A| = 1$  或  $-1$ .  $\square$

我们称行列式绝对值为 1 的整系数矩阵为**单位模矩阵** (Unimodular Matrix), 它们全体所构成的集合在矩阵乘法下构成一个群, 称为**模群** (Modular Group). 可以证明, 模群由矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

生成, 它们对应的分式线性变换分别为  $f(z) = z + 1$ ,  $g(z) = -1/z$ .

双周期函数  $f$  的周期模  $M$  有许多基. 我们可以找到一组“特殊”的基 (称为**典范基**), 如下述定理所述. 虽然我们并不常用典范基, 但重要的是, 我们知道这样一组基存在. 它的证明这里将不再赘述, 可以查阅 [2] 第七章第 2 节.

**定理 1.8.2** 存在  $M$  的一组基  $(\omega_1, \omega_2)$ , 其对应的  $\tau = \omega_2/\omega_1$  满足如下条件: (i)  $\text{Im } \tau > 0$ ; (ii)  $-1/2 < \text{Re } (\tau) \leq 1/2$ ; (iii)  $|\tau| \geq 1$ ; (iv) 若  $|\tau| = 1$ , 则  $\text{Re } (\tau) \geq 0$ . 满足上述条件的  $\tau$  是唯一确定的, 但可能有 2、4 或 6 组对应的基.

现在, 我们介绍椭圆函数的几个关于极点和零点的一般性质. 方便起见, 取椭圆函数  $f$  周期模的一组基  $(\omega_1, \omega_2)$ , 对任意  $w \in \mathbb{C}$ , 定义

$$P_w = \{z \in \mathbb{C} \mid z = w + a\omega_1 + b\omega_2, 0 \leq a < 1 \text{ 且 } 0 \leq b < 1\},$$

称之为  $f$  的一个**周期平行四边形**. 因为任一模  $M$  的同余类在  $P_w$  上都存在唯一代表元, 所以  $f$  由其在  $P_w$  上的取值完全确定.

首先, 我们有:

**命题 1.8.3** 没有极点的椭圆函数只能是常值函数.

**证明:** 设  $f$  是没有极点的椭圆函数, 则  $f$  为整函数. 任取  $w_0 \in \mathbb{C}$ , 由  $\overline{P_{w_0}}$  是紧集得  $f$  在  $\overline{P_{w_0}}$  有界, 于是  $f$  在整个复平面有界, 由 Liouville 定理立即得  $f$  为常数.  $\square$

因为解析函数的零点和极点都是孤立的, 所以在一个周期平行四边形内  $f$  的极点集只能为有限集. 我们称  $f$  在一个周期平行四边形内的极点个数为它的**阶 (order)**. 以下三个定理揭示了椭圆函数极点和零点的一些性质.

**命题 1.8.4** 椭圆函数的留数和为 0.

**证明:** 取  $w$ , 使  $f$  在周期平行四边形  $P_w$  的边界上没有极点, 取  $\partial P_w$  的正向. 那么,  $f$  在  $P_w$  内的留数和为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P_w} f(z) dz.$$

注意到  $f$  以  $\omega_1, \omega_2$  为周期, 上述积分为零, 即得结论.  $\square$

由此我们还可以得到椭圆函数在一个周期平行四边形内不可能只有一个单极点, 即椭圆函数的阶大于等于 2.

**命题 1.8.5** 非常值椭圆函数在一个周期平行四边形内极点和零点的个数相等.

**证明:** 同样地, 我们取  $w$ , 使在周期平行四边形  $P_w$  的边界上  $f$  没有极点和零点, 取  $\partial P_w$  的正向. 那么, 根据辐角原理得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P_w} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{N}_z - \mathcal{N}_p,$$

其中  $\mathcal{N}_z$  和  $\mathcal{N}_p$  分别表示  $f$  在  $P_w$  内的零点个数和极点个数.

同样地, 注意到  $f'/f$  以  $\omega_1, \omega_2$  为周期, 上述积分为零, 即得结论.  $\square$

**命题 1.8.6** 设  $n$  阶椭圆函数在一个周期平行四边形内的零点和极点分别为  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , 则

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \dots + b_n \pmod{M}. \quad (1-20)$$

**证明:** 仍取  $w$ , 使  $f$  在周期平行四边形  $P_w$  的边界上没有极点和零点, 再取  $\partial P_w$  的正向. 考虑

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P_w} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = a_1 + a_2 + \dots + a_n - (b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$

另一方面,注意到

$$\frac{1}{2\pi i} \left( \int_w^{w+\omega_1} - \int_{w+\omega_2}^{w+\omega_1+\omega_2} \right) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\omega_2 \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_w^{w+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz}_{(*)}.$$

(\*) 是整数,因为它正是在原点处  $f(z)$  从  $w$  到  $w + \omega_1$  所构成闭曲线  $\gamma$  的卷绕数! 即:

$$W_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - 0} \stackrel{\text{令 } \zeta=f(z)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_w^{w+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in \mathbb{Z}.$$

同理对

$$\frac{1}{2\pi i} \left( \int_w^{w+\omega_2} - \int_{w+\omega_1}^{w+\omega_2+\omega_1} \right) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\omega_1 \frac{1}{2\pi i} \int_w^{w+\omega_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

亦然. 因此  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \in M$ , 即 (1-20) 式. □

让我们回到对椭圆积分的讨论上,这里将只介绍这个纷繁复杂的话题的冰山一角. 形如 (1-19) 式的积分就是一种椭圆积分. 椭圆积分是从实际问题中逐步提炼出来的一大类积分,例如十七世纪时,人们希望求出椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的周长. 而这将导致计算积分

$$S = a \int_0^1 \frac{(1 - k^2 t^2) dt}{\sqrt{(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)}},$$

其中系数  $k$  为椭圆的离心率  $k = \sqrt{(a^2 - b^2)}/a$ . 具体说来,椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$$

只需计算椭圆在第一象限内的弧长,取  $t \in (0, \pi/2)$ . 利用弧长公式,得

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-a \sin(t))^2 + (b \cos(t))^2} dt \\ &= a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2(t) + \frac{b^2}{a^2} \cos^2(t)} dt \\ &= a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2(t)} dt \\ &= a \int_0^1 \frac{1 - k^2 u^2}{\sqrt{(1 - k^2 u^2)(1 - u^2)}} du \quad (\text{令 } u = \cos(t)). \end{aligned}$$

这就是椭圆积分的雏形之一. 几十年后,经过 Euler 等数学家的研究,椭圆积分的理论渐渐完善,但仍没有形成完整的体系,直到法国数学家 Legendre 的出现.

一般而言,椭圆积分是形如

$$\int R(t, \sqrt{P(t)}) dt$$

其中  $R(\cdot, \cdot)$  是有理函数,  $P(\cdot)$  是 3 或 4 阶多项式的积分, 它们通常不能用初等函数表达. Legendre 发现椭圆积分都可以用以下三类基本形式表达, 即

$$F(x; k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}} \text{ 或 } F(\varphi; k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}; \quad (1-21)$$

$$E(x; k) = \int_0^x \frac{\sqrt{(1-k^2t^2)}}{\sqrt{(1-t^2)}} dt \text{ 或 } E(\varphi; k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} d\theta; \quad (1-22)$$

$$\Pi(n; \varphi | k) = \int_0^{\sin\varphi} \frac{1}{1-nt^2} \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}}. \quad (1-23)$$

其中  $n \in \mathbb{R}$ , 我们把  $0 < k < 1$  称为椭圆积分的**模数**. 上述不定积分分别称为第一、第二和第三类**不完全椭圆积分**. 对应  $x = 1$  或  $\varphi = \pi/2$  时的定积分则分别称为第一、第二和第三类**完全椭圆积分**.

椭圆积分可以通过 Jacobi 虚变换、Landen 型变换、虚模数变换等等来处理, 也可以通过幂级数或者微分方程等来研究, 它的内容十分庞杂, 无论对读者还是笔者而言都是沉重的负担, 因而这里不再展开讨论. 感兴趣的同学可以查阅 [14] 第九、十章或数学家 Harris Hancock 关于椭圆积分的专著 [15].

我们现在考虑 (1-19) 式中何时  $K' = K$ , 即对应的矩形区域为正方形的情形. 通常, 我们记  $K(k) = F(1; k)$ , 即该式中的  $K/2$ . 我们也习惯把 (1-19) 式中的  $K'$  记为  $K'(k)$ . 令  $k' = \sqrt{1-k^2}$ , 则  $0 < k' < 1$ , 称之为椭圆积分的**余模数**. 在  $K'(k)$  中, 对  $t$  作变量替换  $t = (1 - k'^2 u^2)^{-1/2}$  计算得:

$$\begin{aligned} K'(k) &= \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} \\ &= \int_0^1 \frac{d(1-k'^2u^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{((1-k'^2u^2)^{-1}-1)(1-k^2(1-k'^2u^2)^{-1})}} \\ &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-k'^2u^2)(1-u^2)}} \\ &= K(k') \end{aligned}$$

这将导致解方程

$$\frac{K(k')}{K(k)} = 2.$$

直接解该方程十分困难, 但令人惊奇的是, 我们可以不通过繁杂的计算, 而是从几何的角度解决这一问题! (习题9.)

更一般地, 我们甚至还可以考虑方程

$$\frac{K(k')}{K(k)} = \sqrt{r}, \quad r \in \mathbb{N}^+.$$

注意到  $K(k)$  在  $(0, 1)$  单增,  $K'(k)$  在  $(0, 1)$  单减, 不难发现上述方程有唯一解, 记为  $k_r$ . 我们称之为椭圆积分的**奇异值**. 1967年, Selberg 和 Chowla 证明了椭圆积分的奇异值均可以由有穷个  $\Gamma$  函数表示出来, 见 [17].

另外, Abel 还曾证明对任意整数  $a, b, c, d$  和  $n$ , 方程

$$\frac{K(k')}{K(k)} = \frac{a + b\sqrt{n}}{c + d\sqrt{n}}$$

的解  $k$  均是整系数多项式的根, 详见 [16] 第二十一、二十二章.

## 1.9 弧边多边形的情形

这一小节我们将讨论弧边多边形的共形映射. 所谓弧边多边形, 就是指各边为圆弧的多边形, 其中各个圆弧的半径、角度都可能不同. 这时, 多边形的内角则定义为顶点处两圆弧的切线所构成的夹角. 我们将借助 Schwarz 导数 (Schwarzian Derivative) 来研究从上半平面或单位圆盘到弧边多边形的共形映射.

首先给出 Schwarz 导数的定义.

**定义 1.9.1 (Schwarz 导数)** 设函数  $f$  在区域  $\Omega$  内解析, 定义

$$S(f) := \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2 = \left( \frac{f''}{f'} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2 \quad (1-24)$$

为  $f$  的 Schwarz 导数.

可以验证, 若  $f$  和  $g$  都解析, 则  $S(f \circ g) = (S(f) \circ g)(g')^2 + S(g)$  (见习题10.). 且对任意对应矩阵的行列式不为 0 的分式线性变换  $f(z) = (az + b)/(cz + d)$  有  $S(f) = 0$  (只需验证反演变换), 从而 Schwarz 导数保持分式线性变换, 即

$$S(f \circ g) = S(g)$$

其中  $f$  是满足上述条件的任意分式线性变换.

为什么保持分式线性变换如此重要呢? 为回答这个问题, 我们先来谈谈隐藏在多边形的共形映射背后的想法. 这部分内容主要参考 [18] 第一、二章和 [19] 第五章.

回顾1.7小节, Schwarz-Christoffel 公式表明: 共形映射  $f$  的导数可能形如

$$f' = \prod f_k,$$

其中  $f_k$  是某些特定的函数. 从几何角度看, 上式的意义是

$$\arg f' = \sum \arg f_k.$$

我们希望  $\arg f_k$  是阶梯函数, 从而  $\arg f'$  除了几个间断点外是常数 (即  $f$  把实轴映成一个多边形). 定理1.7.3则告诉我们对于从上半平面 (或单位圆盘) 到 (直边) 多边形区

域的共形映射,  $f_k$  形如

$$f_k = (z - z_k)^{-\beta_k},$$

其中  $\beta_k$  如上节定义,  $z = z_k \in \mathbb{R}$  (或  $z = z_k \in \partial\mathbb{D}$ ) 是  $\arg f'$  发生跳跃的点. 下图说明了上半平面的情形中  $f_k$  在  $z_k$  附近的性态.

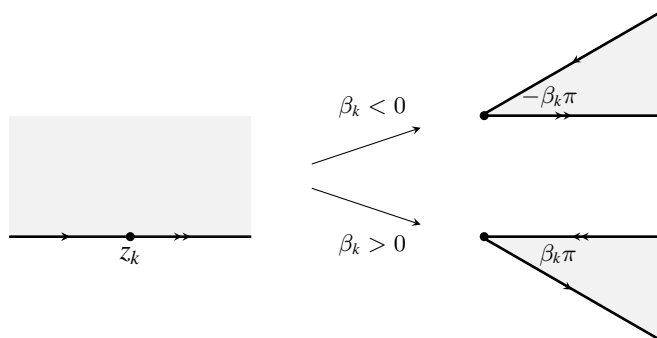


图 1.9.1  $f_k$  在  $z_k$  附近的性态

以此出发可以给出上半平面的 Schwarz-Christoffel 公式的另一个证明. 它的大致想法是由  $f'$  在  $z_k$  附近形如

$$f' = (z - z_k)^{-\beta_k} \psi(z),$$

其中  $\psi(z)$  在  $z_k$  的一个邻域内解析, 证明

$$\frac{f''}{f'} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - z_k}$$

可以解析开拓到全平面且在无穷远点处解析, 再由 Liouville 定理证明  $f''/f' \equiv 0$ . 最后注意到  $f''/f' = (\log f')'$ , 积分两次 (详见 [19] 第五章第 6 节) 即得 (1-16) 式.

实际上, 对弧边多边形的情形我们的想法与上述想法如出一辙, 只是上述证明考虑  $f''/f'$ , 而此时要考虑  $S(f)$ . 我们现在把它仔细写下来.

设  $P$  是弧边多边形区域, 其顶点为  $v_k$ , 内角为  $\alpha_k\pi$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). 再设  $f$  是从上半平面到区域  $P$  的共形映射. 我们希望找到  $f$  满足的微分方程.

由于分式线性变换可以把圆弧映成直线, 从而可以把  $P$  在顶点  $v_k$  处由两个弧形构成的夹角为  $\alpha_k\pi$  的角形区域映成顶点在原点, 一条边在实轴的角形区域 (夹角不变). 而分式线性变换保持 Schwarz 导数, 因此研究  $S(f)$  时我们可以假设  $f$  把实轴上的线段映到上述区域中的后者. 由上述分析得,  $f$  在  $z_k \in \mathbb{R}$  附近形如

$$f = f_k \psi_k(z) = (z - z_k)^{\alpha_k} \psi_k(z),$$

其中  $\psi_k(z)$  在  $z_k$  的一个邻域内解析, 且在该邻域内, 当  $z \in \mathbb{R}$  时  $\psi_k(z)$  为实数,  $\psi_k(z_k) \neq 0$ .

对等式两边求 Schwarz 导数, 得

$$S(f) = \frac{1}{2} \frac{1 - \alpha_k^2}{(z - z_k)^2} + \frac{\gamma_k}{z - z_k} + \varphi_k(z),$$

其中  $\varphi_k(z)$  是解析函数, 且

$$\gamma_k = \frac{1 - \alpha_k^2}{\alpha_k} \frac{\psi'_k(z_k)}{\psi_k(z_k)} \in \mathbb{R}.$$

因此, 令

$$S(z) := S(f) - \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{2} \frac{1 - \alpha_k^2}{(z - z_k)^2} + \frac{\gamma_k}{z - z_k} \right], \quad (1-25)$$

则  $S(z)$  为上半平面的闭包上的解析函数 (因为  $f$  可以解析开拓到上半平面的闭包去掉  $z_k, k = 1, 2, \dots, n$  上而且我们已经消除了它的极点) .

注意到在实轴去掉点  $z_k, k = 1, 2, \dots, n$  外  $S(f)$  恒取实值且  $z_k \in \mathbb{R}$ , 角度  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  及系数  $\gamma_k \in \mathbb{R}$ , 从而 (1-25) 式在整个实轴上恒取实值, 因此  $S(z)$  可以解析开拓到整个复平面上.

最后, 注意到  $f(\infty)$  不是弧边多边形的顶点, 从而  $f$  可以解析开拓到无穷远点, 于是  $f$  在  $z = \infty$  附近有展开

$$f(z) = f(\infty) + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots .$$

求得:  $z = \infty$  是  $f'(z)$  的二阶零点, 而它是  $f''$  的三阶零点, 也是  $f'''$  的四阶零点, 因此  $S(\infty) = 0$ , 故  $S(z)$  有界. 由 Liouville 定理立即得  $S(z) \equiv 0$ . 也就是说,  $f$  满足微分方程

$$S(f) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{2} \frac{1 - \alpha_k^2}{(z - z_k)^2} + \frac{\gamma_k}{z - z_k} \right].$$

注意: 参数  $\alpha_k$  和  $\gamma_k$  并不是完全独立的, 它们之间要满足一定的关系. 这些参数之间的关系可以由  $S(f)$  在无穷远点处的展开式导出 (详见 [19] 第五章第 7 节), 这里我们只给出最后结果.

**定理 1.9.2** 若  $F$  把上半平面共形地映到内角为  $\alpha_k \pi, k = 1, 2, \dots, n$  的弧边多边形区域  $P$ , 那么  $F$  的 Schwarz 导数满足

$$S(F) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{2} \frac{1 - \alpha_k^2}{(z - z_k)^2} + \frac{\gamma_k}{z - z_k} \right]. \quad (1-26)$$

其中  $z_k, \gamma_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n$  且参数  $\gamma_k$  和  $\alpha_k$  满足:

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n 2\alpha_k \gamma_k + 1 - \alpha_k^2 = 0, \quad \sum_{k=1}^n \gamma_k \alpha_k^2 + \alpha_k (1 - \alpha_k^2) = 0.$$

同样地, 我们也可以把该结果搬到单位圆盘上来, 而且分式线性变换不改变 Schwarz 导数的这一性质使得计算并不复杂.

**定理 1.9.3** 若  $F$  把单位圆盘共形地映到内角为  $\alpha_k\pi, k = 1, 2, \dots, n$  的弧边多边形区域  $P$ , 那么  $F$  的 Schwarz 导数满足

$$S(F) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k} \left[ a_k \frac{2w_k - z}{(z - w_k)^2} + \frac{i\mu_k}{z - w_k} \right]. \quad (1-27)$$

其中  $w_k \in \partial\mathbb{D}, a_k = (1 - \alpha_k^2)/2, \mu_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n$  且参数  $w_k, \mu_k$  和  $\alpha_k$  满足:

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n w_k(a_k + i\mu_k) = 0.$$

接下来的问题便是如何求解  $S(F)$  满足的微分方程了. 我们有下述结果:

**命题 1.9.4** 设  $p(z)$  为区域  $\Omega$  上的解析函数, 考虑微分方程

$$y'' + py = 0. \quad (1-28)$$

设其有两个线性无关的解  $y_1, y_2$ , 则  $f = y_1/y_2$  满足

$$S(f) = 2p.$$

证明: 由已知,  $y_1 = fy_2$ , 代入原微分方程得:

$$f''y_2 + 2f'y_2' + \underbrace{fy_2''}_{\text{为0}} + pfy_2 = 0.$$

从而

$$\frac{f''}{f'} = -2\frac{y_2'}{y_2}.$$

代入  $S(f)$  的表达式即得结论. □

到此, 上半平面或单位圆盘到弧边多边形的共形映射的问题在理论上已经解决了.

最后是愉快的故事时间, 我们只简单介绍一个例子, 细致地分析请查阅 [19] 第五章第 7 节. 取  $n = 3$ , 记弧边三角形的内角分别为  $\pi\alpha, \pi\beta, \pi\gamma$ , 其顶点分别对应  $0, \infty, 1$ . 因为我们关心的是微分方程 (由 (1-26) 式和 (1-28) 式)

$$f'' + \frac{1}{4} \left[ \frac{1 - \alpha^2}{z^2} + \frac{1 - \gamma^2}{(z - 1)^2} + \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - 1}{z(z - 1)} \right] f = 0$$

两个解的商之间的关系, 所以我们可以考虑形如

$$f'' + P(z)f' + Q(z)f = 0$$

上式的微分方程, 它将使得计算更为简单. 可以证明, 我们需要的方程为

$$z(1-z)f'' + [c - (a+b+1)z]f' - abf = 0.$$

其中

$$a = \frac{1}{2}(1 + \beta - \alpha - \gamma), \quad b = \frac{1}{2}(1 - \alpha - \beta - \gamma), \quad c = 1 - \alpha. \quad (1-29)$$

此即**超几何方程**, 它对纯数学和应用数学很多分支都有重要意义. 超几何方程的解的性质已经研究成熟, 详见 Whittaker-Watson 的书 [16] 中关于超几何函数的章节.

简言之, 有如下结果: 从上半平面到内角分别为  $\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi$  的共形映射形如

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)},$$

其中  $f_1(z)$  和  $f_2(z)$  是上述超几何方程的两个线性无关解.

超几何方程的一个解  $f_1$  由下式给出:

$$f_1 = F(a, b, c; z) := \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt,$$

其中  $b > 0, c > b$  是积分存在的必要条件, 这也等价于  $\alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha < 1 + \beta + \gamma$ , 故只需弧边三角形内角和小于  $\pi$ .

为解出共形映射  $f$ , 我们还需要另一组解. 经变量替换等一系列手法, 最终我们得到

$$f_2 = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-c}(1-t+zt)^{-a} dt,$$

也是超几何方程的解. 其中  $b > 0, a > c - 1$  是积分存在的条件, 它等价于  $\alpha + \beta + \gamma < 1, \gamma - \beta - \alpha < 1$ , 故也只需弧边三角形内角和小于  $\pi$ .

于是我们求得共形映射  $f$  形如

$$f(z) = \frac{\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt}{\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-c}(1-t+zt)^{-a} dt}.$$

其中  $a, b, c$  为常数, 且由式 (1-29) 给出.

如果  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ , 该三角形可以由分式线性变换转化为直边三角形; 如果  $\alpha + \beta + \gamma > 1$ , 则超几何方程的解  $f_1, f_2$  需要用其他形式表示出来, 这里不再赘述.

特别地, 若  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , 取弧边三角形区域  $P$  如下图所示, 其中  $O$  为坐标原点,  $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, z_2 = i, z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ .

$$F(z) = \frac{T(z)}{T(1-z)},$$

其中

$$T(z) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-zt)}}.$$

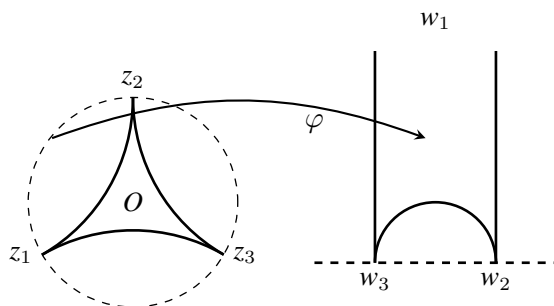


图 1.9.2 区域  $P$  及其由  $\varphi$  映成的区域  $Q$

设从单位圆盘到上半平面的共形映射  $\varphi$  满足 (若开拓到边界)  $\varphi(z_1) = \infty$ ,  $\varphi(z_2) = 1$ ,  $\varphi(z_3) = 0$ . 那么  $P$  在  $\varphi$  下的像  $Q = \varphi(P)$  是如上图实线所示的区域. 其中  $w_1$ ,  $w_2$  和  $w_3$  分别代表  $\infty$ , 1 和 0.

这里面有两个问题: 第一, 我们为什么要关心这个映射呢? 第二, 为什么共形映射  $\varphi$  会把弧边分别映成半圆和与实轴垂直的直线呢?

实际上, 根据这个映射我们得到了从上半平面到区域  $Q$  的共形映射, 其逆映射就是下一小节我们要介绍的模函数 (Modular Function) 之一. 从单位圆盘和上半平面的双曲几何模型来看, 共形映射  $\varphi$  即把单位圆盘上的测地线 (Geodesic) 映成上半平面上的测地线, 我们将在 1.11 小节介绍它.

### 1.10 应用: Picard 小定理

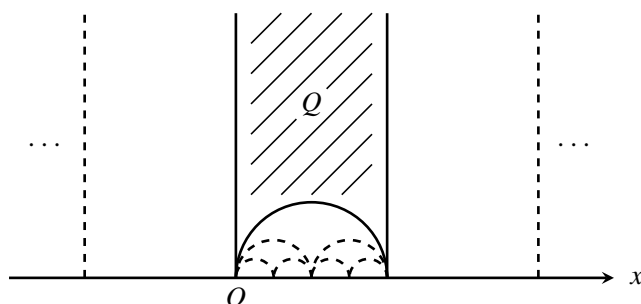
作为弧边多边形的共形映射的应用, 我们将证明 Picard 小定理, 并由此引出模函数的概念.

设  $\lambda = F^{-1} \circ \varphi^{-1}$  是上小节未提及的从区域  $Q$  到上半平面的共形映射, 满足 (若开拓到边界)  $\lambda(0) = 1$ ,  $\lambda(1) = \infty$ ,  $\lambda(\infty) = 0$ . 根据 Schwarz 反射原理 (推论 1.6.7 和注 1.6.8),  $\lambda$  可以解析开拓到整个上半平面上, 如下图所示:

我们把开拓后的模函数仍记为  $\lambda$ , 此时  $\lambda: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} := \mathbb{C}_{0,1}$  (因为  $\lambda(0) = 1$ ,  $\lambda(\infty) = 0$ ). 实际上, 这样的  $\lambda$  是唯一的, 因为上半平面的解析自同构都是分式线性变换, 而三个不动点的分式线性变换只能是恒同映射. 根据反射原理我们有:

$$\lambda\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \lambda(z).$$

其中,  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ,  $\Gamma$  为由矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  和矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  生成的群 (为什么? 提示: 点

图 1.10.1 把  $\lambda$  解析开拓到整个上半平面上

$z$  关于圆  $|z - 1/2| = 1/2$  的对称点为  $1/4(\bar{z} - 1/2) + 1/2 = \bar{z}/(2\bar{z} - 1)$  .

我们称  $\lambda$  在子群  $\Gamma$  (把分式线性变换和对应的矩阵等同起来) 下不变.  $\Gamma$  是模群的子群, 我们称之为**模 2 同余子群**. 一般而言, 如果一个解析函数或亚纯函数在某个模群的子群下不变, 我们称之为**模函数**.

利用模函数  $\lambda$ , 我们可以给出 Picard 小定理的简洁证明.

**定理 1.10.1 (Picard 小定理)** 设  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  为解析函数, 且有至少两点  $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$  不在  $f$  的值域内, 那么  $f$  为常值函数.

证明: 不妨设  $z_1 = 0, z_2 = 1$  (对一般情形, 令  $g = (f - z_1)/(z_2 - z_1)$  即可). 令  $h = \lambda^{-1} \circ f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ , 则  $h$  解析. 注意到  $\text{Im}(h(z)) > 0$  恒成立, 得

$$\left| \frac{1}{h(z) + i} \right| < 1$$

及 Liouville 定理立即得  $h$  为常数, 从而  $f$  为常值函数.  $\square$

模函数还可以用来证明 Montel-Carathéodory 定理, 进而证明 Picard 大定理, 但它们还需要些别的背景知识, 这里恕不介绍. 感兴趣的同学请查阅 [12] 第十六章第 4 节 (这小节利用模函数证明了 Montel-Carathéodory 定理) 和 [4] 第十二章第 4 节 (这小节给出了 Montel-Carathéodory 定理的另一个证明并利用它证明了 Picard 大定理.)

## 1.11 \* 双曲几何的两个模型

这一小节我们将简单勾勒出双曲几何的两个模型, 即双曲平面模型和 Poincaré 单位圆盘模型, 它们是双曲几何最基本的两个例子.

在欧式几何中有度量, 可以刻画曲线长度, 而两点之间线段最短. 那么, 若空间是弯曲的, 什么是“直线”, 又如何刻画长度呢? 如对黎曼球面而言, 不难想象, 球面上的“直线段”就是球面上圆心在球心处的圆弧, 两点的距离就是连接它们的这样的圆弧 (取劣弧) 的长度. 实际上, 不论是对于欧式空间还是黎曼球面, 亦或是我们将要讨论的双曲几何的两个模型而言, 曲线长度、距离等等都是由空间上的度量所决定的.

为此我们先回顾度量的概念. 非空集合  $X$  上的**度量**即为一个正定、对称且满足三角不等式的函数  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ . 对一般的空间而言, 为衡量曲线长度, 我们需要**黎曼度量**, 它是在逐点的切空间上定义的度量, 且整体看是光滑的. 不过对于我们要考虑的模型而言, 每点的切空间和  $\mathbb{C}$  是同构的, 因此我们这里只简单地考虑度量. 从本质上说, 双曲平面模型和 Poincaré 单位圆盘模型不过是分别定义了一种特殊的度量的上半平面  $\mathbb{H}$  和单位圆盘  $\mathbb{D}$ .

在欧式空间中, 两点的距离定义为连接它们的线段长度. 笼统地说, 这里也是一样. 我们先定义上半平面  $\mathbb{H}$  上分段光滑曲线的长度, 用曲线长度的下确界来定义距离. 可以证明, 曲线长度的下确界是可以达到的 (下述双曲直线).

**定义 1.11.1 (曲线在双曲平面的长度)** 设  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  为分段光滑曲线, 定义  $f$  的双曲长度为

$$l_{\mathbb{H}}(f) = \int_f \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} |dz| = \int_a^b \frac{1}{\operatorname{Im}(f(t))} |f'(t)| dt. \quad (1-30)$$

为什么要这样定义曲线长度呢? 这是因为我们要求曲线长度在任何上半平面  $\mathbb{H}$  到自身的解析自同构下保持不变, 详细的推导过程请参看 [20] 第三章第 2 节.

于是, 上半平面  $\mathbb{H}$  上两点  $x, y$  的距离定义为

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \inf\{l_{\mathbb{H}}(f) \mid f \in \Omega(x, y)\}.$$

其中,  $\Omega(x, y)$  是所有连接  $x$  和  $y$  的分段光滑曲线. 可以证明,  $d_{\mathbb{H}}$  确实是  $\mathbb{H}$  上的度量.

对任意双曲平面中的两点  $x, y$ , 存在唯一一条连接  $x$  和  $y$  的长度最短的曲线段, 我们称之为连接  $x, y$  的**(双曲) 直线段**. 实际上, 这样的曲线段形如垂直于实轴的直线段或圆心在实轴上的圆弧. 把它们“延长”即得**双曲直线**. 它们是对欧式空间中直线 (段) 的推广. 具体的证明还是请感兴趣的同学查阅 [20] 第三章.

注意到对任意双曲平面中的两点  $x, y$ , 存在分式线性变换  $\gamma \in \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ , 使得  $\gamma(x) = i\mu$  和  $\gamma(y) = i\lambda$  在虚轴上半轴上. 我们自然得到下述事实:

**定理 1.11.2 (双曲平面上两点距离)** 设  $x, y \in \mathbb{H}$ ,  $\mu$  和  $\lambda$  如上所述, 则

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \left| \log \frac{\lambda}{\mu} \right|.$$

理解了双曲平面模型, 也就理解了 Poincaré 单位圆盘模型. 一言蔽之, Poincaré 单位圆盘模型就是利用共形映射

$$\varphi(z) = -i \frac{z - i}{z + i}$$

把双曲平面模型搬到单位圆盘上来.

**定义 1.11.3 (曲线在 Poincaré 单位圆盘的长度)** 设  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$  为分段光滑曲线, 定义  $f$  的双曲长度为

$$l_{\mathbb{D}}(f) = l_{\mathbb{H}}(\varphi^{-1} \circ f). \quad (1-31)$$

计算, 得

$$\begin{aligned} l_{\mathbb{D}}(f) &= \int_{\varphi^{-1} \circ f} \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} |dz| \\ &= \int_a^b \frac{1}{\operatorname{Im}(\varphi^{-1} \circ f)(t)} \left| (\varphi^{-1} \circ f)'(t) \right| dt \\ &= \int_f \frac{1}{\operatorname{Im}(\varphi^{-1}(z))} \left| (\varphi^{-1})'(z) \right| dz \\ &= \int_f \frac{2}{1 - |z|^2} dz. \end{aligned} \quad (1-32)$$

同理, Poincaré 单位圆盘上的测地线即为与单位圆周垂直 (交点处切线垂直) 的圆弧或延长线为直径的线段, 如下图所示.

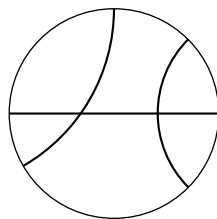


图 1.11.1 Poincaré 单位圆盘上的测地线

我们称双曲平面 (或 Poincaré 单位圆盘) 上两条不相交的线**平行** (parallel). 在这个意义下, 过直线一点有无数条直线与该直线平行!

最后, 双曲平面和 Poincaré 单位圆盘模型都可以看作黎曼流形的特例, 它们对应的黎曼度量分别为  $h = dz^2 / \operatorname{Im}^2(z)$  和  $g = dz^2 / (1 - z^2)^2$ . (1-30) 式和 (1-32) 式中曲线长度的表达就是用 Riemann **距离函数** 给出的曲线长度的定义, 详见 [7] 第十三章第 2 节.

## 1.12 习题

1. 证明注 1.1.5 (3). 利用该结果, 证明**黎曼可去奇点定理**: 若  $f$  在开集  $\Omega$  除其内一点  $z_0$  解析且有界, 那么  $z_0$  是可去奇点.

2. 设解析函数列  $\{f_n\}$  和函数  $f$  定义在区域  $\Omega$  上, 且  $f_n$  在  $\Omega$  的紧子集上一致收敛到  $f$ , 证明:  $f_n$  的  $m$  阶复导数在  $\Omega$  的紧子集上一致收敛到  $f$  的  $m$  阶复导数.

3. 证明: 若解析函数  $f : |z| < 1 \rightarrow |z| < 1$  的逆映射也解析, 那么  $f$  形如

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0},$$

其中  $z_0 \in \mathbb{D}$  and  $\theta \in \mathbb{R}$ .

4. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

在  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 1\}$  的紧子集上一致收敛. (这里  $n^{-z} = e^{-z \log n}$ ).

5. 证明: 对复平面内任意四个互异的点, 总存在分式线性变换把它们分别映到  $1, -1, k$  和  $-k$ , 其中  $k$  的取值依赖于给定的四个点.

6. 设  $\Omega_1, \Omega_2 \subsetneq \mathbb{C}$  是单连通区域. 若  $\operatorname{Iso}(\Omega_1, \Omega_2)$  表示从  $\Omega_1$  到  $\Omega_2$  的解析双射, 证明: 任意给定  $z_0 \in \Omega_1$ , 映射

$$\begin{aligned} \Phi : \operatorname{Iso}(\Omega_1, \Omega_2) &\rightarrow \Omega_2 \times \{|z| = 1\} \\ f &\mapsto \left( f(z_0), \frac{f'(z_0)}{|f'(z_0)|} \right) \end{aligned}$$

是双射.

7. 设  $D_1$  和  $D_2$  为 Jordan 区域,  $z_1, z_2, z_3$  和  $w_1, w_2, w_3$  分别是  $\partial D_1$  和  $\partial D_2$  上逆时针排列的 3 个点. 证明: 存在共形映射  $f : D_1 \rightarrow D_2$ , 且其连续开拓把  $z_j$  映成  $w_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

8. 证明:

$$F(z) = \int_0^z (1 - \omega^n)^{-\frac{2}{n}} d\omega$$

是  $\mathbb{D} := \{|z| < 1\}$  到某个正  $n$  边形的共形映射.

9. 设  $0 < k < 1$ ,

$$F(z) = \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}},$$

其中  $\operatorname{Im}(z) > 0$ . 记  $f(z)$  为  $F^{-1}$  的亚纯开拓 (整个复平面). 令:

$$K = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

(1) 证明:  $K = K'$  当且仅当存在把  $-1/k, -1, 1$  和  $1/k$  分别映到  $-1, 1, 1/k$  和  $-1/k$  的分式线性变换, 从而  $K = K'$  当且仅当  $k = (\sqrt{2} - 1)^2$ .

(2) 证明:  $f(z)$  是奇函数,  $f(z + \frac{K}{2})$  是偶函数.

10. 设

$$S(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2 = \left( \frac{f''}{f'} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2$$

称为  $f$  的 Schwarz 导数.

(1) 证明:

$$S(f \circ g) = (S(f) \circ g) (g')^2 + S(g).$$

(2) 计算  $S(f^{-1})$ .

11. 若  $f$  在某点有  $n(n \geq 2)$  阶零点或极点, 求该点处  $f$  的 Schwarz 导数  $S(f)$  的主项.

12. 证明: 函数  $(e^z - 1)^{-1}$  在原点处的 Laurent 展开式形如

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} z^{2k-1},$$

其中  $B_k \in \mathbb{Q}$ . 计算  $B_1$ ,  $B_2$  和  $B_3$ .

## 第 2 章

### 级数部分

笔记的第二部分, 我们将从级数的角度探讨解析函数和亚纯函数的性质. 第2.1-2.3小节将证明 Mittag-Leffler 定理和 Weierstrass 定理, 并简要介绍 Cousin 第一、第二问题. 之后的第2.4-2.7小节, 我们则将利用这两大定理着眼于一些特殊函数, 诸如  $\Gamma$  函数、黎曼  $\zeta$  函数和  $\Theta$  函数. 最后, 我们还将再探椭圆函数, 从级数的角度来更进一步认识它 (第2.8小节).

在讨论特殊函数时, 本笔记将尽可能地提及它们与以往所学知识的联系, 或是介绍它们与其他数学分支的联系. 例如: 在数学分析中已经介绍过的  $\Gamma$  函数, 这里将会从复变函数的角度重新定义; 介绍  $\Theta$  函数时, 还将提及它在组合数学中的应用, 习题中体现了  $\Theta$  函数与微分方程的联系等等.

#### 2.1 Mittag-Leffler 定理

这一小节, 我们将证明 Mittag-Leffler 定理, 从而更深入地了解亚纯函数与其极点之间的关系. 虽然所述定理可以建立在定义域为任何复平面中的开集的亚纯函数上, 但简单起见, 我们只考虑定义域为整个复平面的情形.

我们知道, 对定义在复平面上的亚纯函数  $f$  而言, 若它在  $z = z_0$  处为  $N$  阶极点, 则它在  $z = z_0$  处有洛朗展开

$$\sum_{k=-N}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

其中, 我们称

$$\sum_{k=-N}^{-1} c_k (z - z_0)^k$$

为  $f$  在  $z = z_0$  处洛朗展开的**主项 (或主要部分)**.

给定复平面上的亚纯函数, 我们可以求出它对应的极点和主项. 那么, 若给定极点和其对应的主项, 能否构造出一个复平面上的亚纯函数, 使得它的极点和主项恰是所给定的呢?

实际上, 答案恒是肯定的. 我们有如下结果:

**定理 2.1.1** (Mittag-Leffler) 给定复数列  $\{z_n\} \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$  和主项

$$P_n = \sum_{k=-N_n}^{-1} c_k^{(n)} (z - z_n)^k,$$

其中  $N_n \in \mathbb{N}^+$  且  $c_{-N_n}^{(n)} \neq 0$ , 那么存在定义在复平面上的亚纯函数, 使得它恰以  $z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  为极点, 以  $P_n$  为  $z = z_n$  处洛朗展开的主项.

粗略地说,  $\sum_{n \geq 1} P_n$  就差不多是我们所需要的亚纯函数, 但它可能是发散的. 为了解决这个问题, 我们对求和做些调整, 即添加适当的“抵消项”, 且不改变极点的主项. 下面我们把这种想法大致写下来. 对一般情形, 详细的证明可以查阅 [4] 第八章第 4 节.

**证明:** 令  $R_n = \inf_{k \geq n} |z_k|$ , 则当  $n \rightarrow \infty$  时,  $R_n \rightarrow \infty$ .

不妨假设  $z_n \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^+$  (将  $z = 0$  为极点的情形单独讨论即可), 那么  $R_n > 0$  且对  $\forall m \geq n$ , 有  $R_n/2 < |z_m|$ . 从而  $P_n$  在  $R_n \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_n\}$  上解析.

由 Rouche 定理, 存在多项式函数  $p_n$ , 使得  $\|P_n - p_n\|_{(R_n/2)\mathbb{D}} < 2^{-n}$ .

因此, 一方面, 级数  $\sum_{m \geq n} (P_m - p_m)$  在  $(R_n/2)\mathbb{D}$  的紧子集上一致收敛到一个定义在  $(R_n/2)\mathbb{D}$  上的解析函数. 另一方面, 注意  $\sum_{m < n} (P_m - p_m)$  是亚纯函数, 且与函数  $\sum_{m < n} P_m$  有同样的极点和对应的主项.

从而, 结合上述两方面及注 1.3.6, 得  $\sum_{n \geq 1} (P_n - p_n)$  在  $\mathbb{C} \setminus \{z_n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$  解析, 且具有所要求的性质.  $\square$

**注 2.1.2** 若  $f, g$  为复平面上的亚纯函数, 且含有相同的极点和对应的主项, 那么  $f - g$  为整函数. 于是, 上述定理中的亚纯函数并不唯一, 我们可以通过与解析函数做和来得到其它符合条件的亚纯函数.

我们来看一个例子.

**例 2.1.3** 求函数  $\pi^2/(\sin^2 \pi z)$  的级数展开式.

注意到函数

$$f_1(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$$

在  $z = n$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  处有二阶极点, 且对应的主项为  $1/(z - n)^2$ . 自然考虑级数

$$f_2(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2}.$$

该级数在  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  的紧子集上一致收敛 (无需调整!), 我们有

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \varphi(z).$$

其中,  $\varphi(z)$  是整函数.

下面证明  $\varphi \equiv 0$ .

容易看出,  $f_1(z)$  和  $f_2(z)$  都以 1 为周期. 且对  $f_1(z)$ , 由

$$|\sin \pi z| = \frac{1}{2} |e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}| \geq \frac{1}{2} ||e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}|| = \frac{1}{2} |e^{\pi \operatorname{Im}(z)} - e^{-\pi \operatorname{Im}(z)}|,$$

得: 当  $\operatorname{Im}(z) \rightarrow \infty$  时,  $f_1(z) \rightarrow 0$ .

对  $f_2(z)$ , 由

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\operatorname{Re}(z)-n)^2 + \operatorname{Im}^2(z)} \leq \frac{1}{\operatorname{Im}^2(z)} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + \operatorname{Im}^2(z)},$$

得: 当  $\operatorname{Im}(z) \rightarrow \infty$  时,  $f_2(z) \rightarrow 0$ .

从而当  $\operatorname{Im}(z) \rightarrow \infty$  时,  $\varphi(z) = f_1(z) - f_2(z) \rightarrow 0$ . 因此由 Liouville 定理立即得  $\varphi \equiv 0$ . 也即:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}. \quad (2-1)$$

通常意义下, 级数

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$$

是发散的. 那么, 我们能赋予它意义么? Mittag-Leffler 定理给出了肯定的答案.

我们先添加一些“抵消项 (counterterms)”, 考虑

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \quad (2-2)$$

这样一来, 上式在  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  上收敛到一个解析函数, 因为当  $|z| = R > 0$  ( $z \notin \mathbb{Z}$ ) 且  $|n| \geq [R] + 1$  时, (这里  $[\cdot]$  是取整函数)

$$\left\| \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right\| = \left\| \frac{z}{n(z-n)} \right\|_{R\mathbb{D}} \leq \frac{R}{|n|(|n|-R)} \quad \text{且} \quad \sum_{|n| \geq [R]+1} \frac{R}{|n|(|n|-R)} < \infty.$$

令

$$g_m(z) = \sum_{|n| \leq m} \frac{1}{z-n},$$

则  $g_m(z)$  在  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  的紧子集上一致收敛, 从而  $g'_m(z)$  在  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  的紧子集上一致收敛. 于是

$$g'_m(z) = - \sum_{|n| \leq m} \frac{1}{(z-n)^2} \rightarrow - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}, \text{ 当 } m \rightarrow \infty.$$

令  $g(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(z)$  (在上述意义下), 则  $g'(z) = \pi^2 / (\sin^2 \pi z)$ . 注意到

$$(\cot \pi z)' = \left( \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \right)' = - \frac{\pi}{\sin^2 \pi z},$$

立即得

$$g(z) = \pi \cot \pi z + C,$$

其中  $C \in \mathbb{C}$  为常数. 而  $g(z)$  为奇函数, 所以  $C = 0$ . 也就是说:

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq m} \frac{1}{z-n} = \pi \cot \pi z. \quad (2-3)$$

这种求和方法可以为研究一类级数带来方便, 它被大数学家 André Weil 称为“Eisenstein 求和法 (Eisenstein Summation) ”.

## 2.2 Weierstrass 定理

与第一小节相对应, 这一小节我们将证明 Weierstrass 定理, 从而更深入地了解解析函数与其零点之间的关系.

在此之前, 我们先对涉及到的无穷乘积的相关知识做简要回顾.

**定义 2.2.1 (无穷乘积的收敛性)** 设  $\{z_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  为一列复数, 若极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n z_k$$

存在且不为零, 则称无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} z_k$  收敛.

记  $\log z = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$ ,  $\text{Log } z$  为  $\log z$  中虚部在  $(-\pi, \pi]$  之间的唯一复数  $w$ , 另记  $\arg z = \text{Im}(\log z)$ ,  $\text{Arg } z = \text{Im}(\text{Log } z)$ .

有下述事实:

**命题 2.2.2**  $\prod_{k \geq 1} z_k$  收敛等价于  $\sum_{k \geq 1} \text{Log } z_k$  收敛.

证明:

“ $\Rightarrow$ ” 记  $\prod_{k \geq 1} z_k$  收敛到  $z = re^{i\theta}$ ,  $-\pi < \theta \leq \pi$ ,  $p_n = \prod_{k=1}^n z_k$  和  $l(p_n) = \text{Log } |p_n| + i\theta_n$ , 其中  $\theta - \pi < \theta_n \leq \theta + \pi$ . 于是  $p_n \rightarrow z$ . 再记  $s_n = \sum_{k=1}^n \text{Log } z_k$ , 则  $e^{s_n} = p_n$ , 从而  $s_n = l(p_n) + 2\pi i k_n$ ,  $k_n \in \mathbb{Z}$ .

由  $\prod_{k \geq 1} z_k$  收敛,  $s_n - s_{n-1} = \text{Log } z_n \rightarrow 0$ ,  $l(p_n) - l(p_{n-1}) \rightarrow 0$ . 因此,  $k_n - k_{n-1} \rightarrow 0$ . 注意  $k_n$  是整数, 从而存在  $n_0 \in \mathbb{N}^+$ , 使得对任意  $n \geq n_0$ ,  $k_n = k$ . 从而  $s_n \rightarrow \underline{l(z)} + 2\pi i k$ , 即  $\sum_{k \geq 1} \text{Log } z_k$  收敛.

“ $\Leftarrow$ ” 记  $s_n = \sum_{k=1}^n \text{Log } z_k \rightarrow s$ , 则  $p_n = e^{s_n} \rightarrow e^s$ , 即  $\prod_{k \geq 1} z_k$  收敛.

□

**注 2.2.3**  $\prod_{k \geq 1} z_k$  收敛推不出  $\sum_{k \geq 1} (z_k - 1)$  收敛, 而后者也推不出前者. 具体例子可见 [21] 第九章第 7 节.

**定义 2.2.4 (无穷乘积的绝对收敛性)** 若无穷级数  $\prod_{k \geq 1} z_k$  满足  $\sum_{k \geq 1} |\operatorname{Log} z_k| < \infty$ , 则称其绝对收敛.

在 2.2.3 中, 若将“收敛”改为“绝对收敛”, 那么两个条件就是等价的, 即我们有下述命题:

**命题 2.2.5**  $\prod_{k \geq 1} z_k$  绝对收敛当且仅当  $\sum_{k \geq 1} |z_k - 1| < \infty$ .

证明: 注意

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\operatorname{Log} z}{z - 1} = 1.$$

因此, 存在  $\varepsilon > 0$ , 使得当  $|z - 1| < \varepsilon$  时,

$$\frac{1}{2} \leq \left| \frac{\operatorname{Log} z}{z - 1} \right| \leq 2.$$

从而  $\sum_{k \geq 1} |\operatorname{Log} z_k|$  收敛当且仅当  $\sum_{k \geq 1} |z_k - 1|$  收敛.  $\square$

我们还可以把类似的结论推广到解析函数上, 这里只给出最后结果, 详细证明请查阅 [4] 第七章第 5 节.

**定理 2.2.6** 设  $\Omega$  为复平面中的区域,  $\{f_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  为  $\Omega$  上的一列解析函数, 且每个  $f_n$  都不恒为 0. 若  $\sum_{n \geq 1} [f_n(z) - 1]$  在  $\Omega$  的紧子集上绝对且一致收敛, 那么  $\prod_{n \geq 1} f_n(z)$  收敛到  $\Omega$  上的解析函数.

有了这些铺垫, 现在来考虑这一小节的主要问题. 我们已经知道, 给定极点和其对应的主项, 可以构造出一个复平面上的亚纯函数, 使得它的极点和主项恰是所给定的. 实际上, 把极点换成零点、亚纯函数改成解析函数, 答案依然恒是肯定的. 我们有如下结果:

**定理 2.2.7 (Weierstrass 定理)** 给定复数列  $\{z_n\} \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$ , 则存在一个整函数, 使得它恰以  $z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  为零点 (以重数计阶数). 这样的函数形如

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) e^{\frac{z}{z_n} + \dots + \frac{1}{k_n} \left( \frac{z}{z_n} \right)^{k_n}}. \quad (2-4)$$

其在  $z = 0$  处为  $m$  阶零点,  $m \geq 0$  且  $\{z_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  为非零复数列.

粗略地说,  $z^m \prod_{n \geq 1} (1 - (z/z_n))$  就差不多是我们所需要的解析函数, 但它可能是发散的, 即级数  $\sum_{n \geq 1} \operatorname{Log} (1 - (z/z_n))$  可能是发散的. 为使该级数在紧集上一致收敛, 我们依然使用添加“抵消项”的老办法. 注意到以下事实:

**引理 2.2.8** 若  $\zeta \in \mathbb{C}$  且  $|\zeta| < 1$ , 则  $\operatorname{Re}(1 - \zeta) > 0$ ,  $-\pi/2 < \operatorname{Arg}(1 - \zeta) < \pi/2$  且

$$-\sum_{k \geq 1} \frac{\zeta^k}{k} = \operatorname{Log}(1 - \zeta).$$

这个引理是自然的, 这里不赘述其证明.

我们现在把定理的证明大致写下来.

**证明:** 由 Runge 定理, 令  $R_n = \inf_{k \geq n} |z_k| > 0$ ,  $p_n(z)$  为使得

$$\left\| \operatorname{Log} \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) - p_n(z) \right\|_{\frac{R_n}{2}\overline{\mathbb{D}}} < 2^{-n}$$

的多项式函数. 特别地, 根据上述引理 (引理 2.2.8) 我们取

$$p_n(z) = -\sum_{k=1}^{k_n} \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k,$$

其中  $k_n$  满足  $\sum_{k > k_n} 1/k |R_n/(2z_n)|^k < 2^{-n}$ .

令  $g_n(z) = \operatorname{Log}(1 - (z/z_n)) - p_n(z)$ , 则对任意  $k \geq n$ , 有  $\|g_k\|_{R_n/2\overline{\mathbb{D}}} < 2^{-k}$ . 因此  $\prod_{k \geq n} e^{g_k}$  满足  $\|e^{g_k} - 1\|_{\frac{R_n}{2}\overline{\mathbb{D}}} < e^{2^{-k-1}}$ . 于是  $\prod_{k \geq n} e^{g_k}$  在  $R_n/2\overline{\mathbb{D}}$  的紧子集上一致收敛. 因此,

$$P(z) = z^m \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) e^{\frac{z}{z_n} + \dots + \frac{1}{k_n} \left( \frac{z}{z_n} \right)^{k_n}} \quad (2-5)$$

在复平面的紧子集上一致收敛. 再由注 1.3.6, 得  $P(z)$  为整函数, 且具有所要求的性质.

若  $f$  为整函数且与  $P$  有完全相同的零点 (包括重数), 那么函数  $f/P$  为整函数且无零点. 因此, 存在整函数  $g$ , 使得  $f/P = e^g$ , 也即  $f$  形如 (2-4) 式.  $\square$

**注 2.2.9** 选择  $\{k_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  时, 我们可以令其中有限个为 0. 另外, 对满足  $\sum_{j \geq 1} 1/|z_{n_j}| < \infty$  的子列  $n_i$ , 也可以直接令所有  $\{k_{n_j}\}$  为 0.

下面考虑一类特殊情形: 形如 (2-5) 式的乘积  $P(z)$  中所有  $k_n$  均为同一个常数  $h \in \mathbb{N}$ , 也即  $k_n = h, \forall n \in \mathbb{N}^+$  的情形. 我们把这样的乘积  $P(z)$  称为**典范乘积** (Canonical Product).

先来探究典范乘积收敛的一个充分条件. 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$ , 可取  $\rho > 0$ , 使得  $|z_n| > \rho, \forall n \in \mathbb{N}^+$ . 在 Weierstrass 定理 (定理 2.2.7) 的证明中, 有: 当  $|z_n| > \rho$  时,

$$\left\| \operatorname{Log} \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) + \sum_{k=1}^{k_n} \frac{1}{k} \left( \frac{z}{z_n} \right)^k \right\|_{\rho\overline{\mathbb{D}}} \leq \sum_{k > k_n} \frac{1}{k} \left( \frac{\rho}{|z_n|} \right)^k.$$

从而

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{k > n} \frac{1}{k} \left( \frac{\rho}{|z_n|} \right)^k < \infty \Rightarrow \text{典范乘积收敛}.$$

注意到

$$\frac{1}{h+1} \left( \frac{\rho}{|z_n|} \right)^{h+1} \leq \sum_{k>h} \frac{1}{k} \left( \frac{\rho}{|z_n|} \right)^k \leq \frac{1}{h+1} \left( \frac{\rho}{|z_n|} \right)^{h+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\rho}{|z_n|}},$$

由此推知典范乘积收敛的一个充分条件为：对某个  $h \in \mathbb{N}$ , 有

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|z_n|^{h+1}} < \infty.$$

自然地, 引出如下定义:

**定义 2.2.10 (亏格<sup>[1]</sup> (genus))** 设  $P(z)$  为典范乘积. 称

$$h = \inf \left\{ m \in \mathbb{N} \mid \sum_{n \geq 1} 1/|z_n|^{m+1} < \infty \right\}$$

为典范乘积  $P(z)$  的亏格, 记之为  $\text{genus } P(z)$ . 如果整函数  $f(z) = e^{g(z)}P(z)$ ,  $P(z)$  为典范乘积且  $g(z)$  为多项式函数, 那么称  $f$  亏格有限, 并定义解析函数  $f(z)$  的亏格为  $\max(\deg g(z), \text{genus}(P(z)))$ .

来看一些例子.

**例 2.2.11** 设  $C \in \mathbb{C}$  为常数, 非零复数列  $\{z_n\}$  满足  $\sum_{k \geq 1} 1/|z_k| < \infty$ . 则解析函数

$$f(z) = Cz^m \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{z}{z_k} \right)$$

的亏格为 0.

**例 2.2.12** 设  $C, \alpha \in \mathbb{C}$  为常数, 非零复数列  $\{z_n\}$  满足  $\sum_{k \geq 1} 1/|z_k| = \infty$  且  $\sum_{k \geq 1} 1/|z_k|^2 < \infty$ , 或  $\alpha \neq 0$  且非零复数列  $\{z_n\}$  满足  $\sum_{k \geq 1} 1/|z_k| < \infty$ . 则解析函数

$$f(z) = Cz^m e^{\alpha z} \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{z}{z_k} \right)$$

的亏格为 1.

**例 2.2.13** 考虑函数  $f(z) = \sin \pi z$  的无穷乘积展开式.

首先  $f(z)$  所有零点为  $z = n, n \in \mathbb{Z}$ , 且  $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} 1/|n| = \infty, \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} 1/n^2 < \infty$ .

于是亏格为 1 的典范乘积

$$P(z) = z \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( 1 - \frac{z}{n} \right) e^{\frac{z}{n}}$$

[1]. 这里将 Dan-Virgil Voiculescu 教授讲稿中的“genus of a canonical product”中的“genus”暂译为“亏格”.

收敛, 且存在整函数  $g(z)$ , 使得

$$\sin \pi z = e^{g(z)} z \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}. \quad (2-6)$$

两边取对数导数, 得

$$\begin{aligned} \pi \cot \pi z &= g'(z) + \underbrace{\frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{z-n}\right)}_{(2-3)\text{式}} \\ &= g'(z) + \pi \cot \pi z. \end{aligned}$$

于是  $g'(z) = 0$ ,  $g(z) = C$  为常值函数. 代入 (2-6) 式, 即

$$\sin \pi z = e^C z \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

在上式中两边同除以  $z$ , 再令  $z$  趋于 0 取极限, 得  $e^C = \pi$ . 即:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}. \quad (2-7)$$

也可以写为

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \quad (2-8)$$

最后我们介绍性地提及亏格与解析函数阶的关系.

**定义 2.2.14 (增长的阶 (order of growth))** 设函数  $f$  为整函数. 定义其增长的阶为

$$\rho = \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log \|f\|_{R\mathbb{D}})}{\log R}.$$

它可以等价表述为

$$\rho = \inf \{m \geq 0 \mid |f(z)| \leq C_1 e^{C_2 |z|^m}\}.$$

数学家 Jacques Hadamard 证明了下述定理:

**定理 2.2.15** 设整函数  $f$  亏格有限, 若记其亏格为  $h$ , 增长的阶为  $\rho$ , 则  $\rho \in [h, h+1]$ .

证明: 见 [4] 第十一章第 2-3 节. □

### 2.3 \*Cousin 第一、第二问题

这一小节, 我们将由 Mittag-Leffler 定理和 Weierstrass 定理引出 Cousin 第一、第二问题, 目的是拓宽数学视野. 简言之, Cousin 第一、第二问题是关于满足某些特定“局部

信息”的（多）复变亚纯函数的存在性的问题，它们由数学家 *Perre Cousin* 在 1895 年提出并给出部分解答。这里只介绍问题的提出，至于其解答，则远超出本笔记的范围，恕不介绍。

我们先来回顾 *Mittag-Leffler* 定理。这个定理告诉我们，对于给定的一列模趋于无穷的极点  $z_k$  和对应的主项  $P_k$ ，总存在复平面上的亚纯函数，使得它的极点和主项恰是所给定的  $z_k$  和  $P_k$ 。

那么，考虑  $\{U_i\}_{i \in I}$  为复平面  $\mathbb{C}$  的有界开覆盖，令

$$\varphi_i = \sum_{k|z_k \in U_i} P_k.$$

注意到该求和为有穷和（否则  $\{z_k\}$  有凝聚点，这与亚纯函数极点的孤立性矛盾），推知  $\varphi_i$  在开集  $U_i$  上为亚纯函数。且函数

$$h_{ij} := \varphi_i - \varphi_j$$

在  $U_i \cap U_j$  上解析。因此，若能找到  $U_i$  上的解析函数  $h_i$ ，使得

$$h_i(z) - h_j(z) = h_{ij}(z), \quad \forall z \in U_i \cap U_j,$$

则有

$$(\varphi_i - h_i)|_{U_i \cap U_j} = (\varphi_j - h_j)|_{U_i \cap U_j},$$

从而存在复平面上的亚纯函数  $f$  满足

$$f|_{U_i} = \varphi_i - h_i, \quad \forall i \in I.$$

因此  $f$  恰有给定的极点和主项。所以我们自然会问：“满足条件的  $h_i$ ”是否存在？实际上这就是 *Cousin 第一问题*，也称 *Cousin 加性问题*：

设  $\{U_i\}_{i \in I}$  是  $\mathbb{C}$  的有界开覆盖，给定定义在  $U_i \cap U_j$  上的解析函数  $h_{ij}$ ，使得

- (1)  $h_{ij}(z) = -h_{ji}(z), \quad \forall z \in U_i \cap U_j;$
- (2)  $h_{ij}(z) + h_{jk}(z) + h_{ki}(z) = 0, \quad \forall z \in U_i \cap U_j \cap U_k.$

是否一定存在定义在  $U_i$  上的解析函数  $h_i$ ，使得

$$h_i(z) - h_j(z) = h_{ij}(z), \quad \forall z \in U_i \cap U_j?$$

由上面的分析知道，*Cousin 第一问题*有解可立即推得 *Mittag-Leffler* 定理。

我们再来看 *Weierstrass* 定理。它则告诉我们，对于给定的一列模趋于无穷的点列  $z_k$ ，总存在整函数，使得它的零点（以重数计）恰是所给定的  $z_k$ 。

类似地, 取复平面的有界开覆盖, 仍记为  $\{U_i\}_{i \in I}$ . 令

$$\psi_i = \prod_{k | z_k \in U_i} (z - z_k).$$

那么函数

$$g_{ij} := \psi_i / \psi_j$$

在  $U_i \cap U_j$  上解析, 且可逆 (即恒不为 0). 若能找到定义在  $U_i$  上的可逆解析函数  $g_i$ , 使得

$$\frac{g_i(z)}{g_j(z)} = g_{ij}(z), \quad \forall z \in U_i \cap U_j,$$

则有

$$\frac{\psi_i(z)}{g_i(z)} = \frac{\psi_j(z)}{g_j(z)}, \quad \forall z \in U_i \cap U_j,$$

从而存在整函数  $f$ , 满足

$$f|_{U_i} = \frac{\psi_i}{g_i}.$$

满足条件的  $g_i$  的存在性则对应 Cousin **第二问题**, 也称 Cousin **乘性问题**:

设  $\{U_i\}_{i \in I}$  是  $\mathbb{C}$  的有界开覆盖, 给定定义在  $U_i \cap U_j$  上的解析函数  $g_{ij}$ , 使得

- (1)  $g_{ij}(z) = g_{ji}^{-1}(z), \quad \forall z \in U_i \cap U_j;$
- (2)  $g_{ij}(z) + g_{jk}(z) + g_{ki}(z) = 0, \quad \forall z \in U_i \cap U_j \cap U_k.$

是否一定存在定义在  $U_i$  上的解析函数  $g_i$ , 使得

$$g_i(z)/g_j(z) = g_{ij}(z), \quad \forall z \in U_i \cap U_j?$$

由上面的分析知道, Cousin 第二问题有解可立即推得 Weierstrass 定理.

Cousin 第一、第二问题可以自然推广到定义在一般复流形的多复变函数上. 如今, 我们已经可以对这两个问题做出完整的回答, 办法是利用同调的工具, 需要用到解析函数构成的 Čech 同调 (Cohomology) 中的层 (Sheaf) 的知识. 感兴趣的同学请查阅 [24] 第五章作初步了解.

## 2.4 从复分析看 $\Gamma$ 函数

这一小节, 我们将从无穷乘积的角度引入 Euler $\Gamma$  函数, 介绍它的一些基本性质, 并证明这种定义与数学分析中  $\Gamma$  函数的定义是等价的. 本节习题2.则给出了另一个  $\Gamma$  函数的重要性质.

我们之前已经证明了

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}},$$

它的零点是整数全体  $\mathbb{Z}$ , 现在来考虑零点是负整数全体的典范乘积 (它将指引我们到 Euler  $\Gamma$  函数), 即

$$G(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}. \quad (2-9)$$

$G(z-1)$  的零点自然是非正整数全体, 由 Weierstrass 定理 (定理 2.2.7) 得

$$G(z-1) = ze^{\gamma(z)} G(z),$$

其中  $\gamma(z)$  为整函数. 在上式两边取对数导数, 有

$$\sum_{n \geq 1} \left( \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{z-1}{n}} - \frac{1}{n} \right) = \gamma'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{z}{n}} - \frac{1}{n} \right).$$

因此

$$\gamma'(z) = -\frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{z + (n-1)} - \frac{1}{z+n} \right) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} = 0,$$

即  $\gamma(z) = \gamma$  为常数,

$$G(z-1) = e^{\gamma} z G(z). \quad (2-10)$$

实际上,  $\gamma$  就是我们熟知的 Euler-Mascheroni 常数, 理由如下: 在 (2-10) 式中取  $z = 1$ , 得

$$1 = G(0) = e^{\gamma} G(1).$$

从而由

$$\begin{aligned} \gamma &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( (\log(n+1) - \log n) - \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right) \end{aligned}$$

即知 (回顾 [21] 第一章第 7 节习题 9-10, 或许你会觉得有趣) .

现在令

$$H(z) = e^{\gamma z} G(z), \quad (2-11)$$

则有

$$H(z-1) = e^{\gamma(z-1)} G(z-1) = e^{\gamma(z-1)} e^{\gamma} z G(z) = e^{\gamma z} z G(z) = z H(z),$$

即

$$H(z) = (z+1)H(z+1). \quad (2-12)$$

再令

$$\Gamma(z) = \frac{1}{zH(z)}, \quad (2-13)$$

则

$$\Gamma(z+1) = \frac{1}{(z+1)H(z+1)} = \frac{1}{H(z)} = \frac{z}{zH(z)} = z\Gamma(z).$$

综上,  $\Gamma(z)$  是亚纯函数, 且在非正整数点处为单极点, 没有零点, 满足函数方程

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (2-14)$$

再综合  $G(z)$ ,  $H(z)$  和  $\Gamma(z)$  的定义 (即 (2-9)、(2-11) 和 (2-13) 三式), 得

$$\Gamma(z) = z^{-1}e^{-\gamma z} \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}. \quad (2-15)$$

根据  $G(z)$  和  $\sin \pi z$  无穷乘积展开的关系, 还可以得到一个数学分析中我们已经熟知的关于  $\Gamma$  函数的函数方程. 根据  $G(z)$  的定义, 我们有

$$G(-z) \cdot z \cdot G(z) = z \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

又由

$$G(z) = e^{-\gamma z} H(z) = e^{-\gamma z} \frac{1}{z\Gamma(z)},$$

代入得

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = zG(z)G(-z) = ze^{-\gamma z} \frac{1}{z\Gamma(z)} e^{\gamma z} \frac{1}{-z\Gamma(-z)} = \frac{1}{(-z)\Gamma(-z)\Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)},$$

也即

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \Gamma(z)\Gamma(1-z). \quad (2-16)$$

我们接着讨论  $\Gamma$  函数的一些特殊函数值, 这些还是我们在数学分析中所熟知的结果. 首先

$$\Gamma(1) = \lim_{z \rightarrow 0} \Gamma(1+z) = \lim_{z \rightarrow 0} z\Gamma(z) = 1, \quad \Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1.$$

再由 (2-14) 式, 结合数学归纳法不难得到

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+. \quad (2-17)$$

(2-15) 式告诉我们  $t > 0$  时,  $\Gamma(t) > 0$ . 因此, 在 (2-16) 式中取  $z = 1/2$ , 得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

同样由数学归纳法得到

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+. \quad (2-18)$$

现在, 让我们回忆数学分析中  $\Gamma$  函数的定义 (不熟悉的同学可以查阅 [22] 第十一章第三节例 4 和第二十章第 4 节), 暂记为  $\tilde{\Gamma}$  以示区分:

$$\tilde{\Gamma}(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt. \quad (2-19)$$

我们知道实函数  $\tilde{\Gamma}(s)$  的定义域是  $s > 0$ , 办法是把它拆成

$$I_1(s) = \int_0^1 e^{-t} t^{s-1} dt \text{ 和 } I_2(s) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

两部分, 然后得到积分  $I_1$  在  $s > 0$  时收敛,  $I_2$  不论  $s$  为何值都收敛. 因此, 自然有: 对复变量  $s$ ,  $I_1$  在  $\operatorname{Re}(s) > 0$  时收敛,  $I_2$  在  $s \in \mathbb{C}$  都收敛.

那么  $\tilde{\Gamma}(s)$  什么时候解析呢? 有如下结果:

**命题 2.4.1** 如 (2-19) 式定义的  $\tilde{\Gamma}(s)$  可以延拓到右半平面  $\operatorname{Re}(s) > 0$  上, 且仍由该式给出.

为证明这个命题, 我们索性给出一个更一般的引理.

**引理 2.4.2** 设函数  $F(z, s)$  定义在  $\Omega \times [0, 1]$  上, 其中  $\Omega$  是复平面中的开集. 假设  $F$  满足

(1) 对每个  $s \in [0, 1]$ , 函数  $F(z, s)$  在  $\Omega$  内解析.

(2) 函数  $F(z, s)$  在  $\Omega \times [0, 1]$  上连续.

那么函数

$$f(z) = \int_0^1 F(z, s) ds$$

在  $\Omega$  上解析.

这个引理是 Morera 定理 (定理 1.1.2) 和紧集上一致收敛的又一应用. 为证明  $f$  在  $\Omega$  上解析, 只需  $f(z)$  在  $\Omega$  内的任意圆盘  $D$  上解析. 而由 Morera 定理, 只需对任意包含于  $D$  内的三角形闭曲线  $T$  有

$$\int_T \int_0^1 F(z, s) ds dz = 0.$$

若能交换求和次序, 则问题迎刃而解. 因此, 我们的想法是把积分表达成黎曼和的极限, 再利用一致收敛的性质. 我们把它仔细写下来.

证明: 对每个  $n \in \mathbb{N}^+$ , 考虑黎曼和

$$f_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F\left(z, \frac{k}{n}\right).$$

由条件 (1) 知每个  $f_n$  在  $\Omega$  内解析. 我们断言: 在任意一个闭包含于  $\Omega$  内的圆盘  $D$  上, 函数列  $\{f_n\}$  一致收敛到  $f$ .

下面证明断言. 注意到紧集上的连续函数是一致连续的, 即对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对任意  $0 \leq s_1, s_2 \leq 1$  且  $|s_1 - s_2| < \delta$ , 有

$$\sup_{z \in D} |F(z, s_1) - F(z, s_2)| < \varepsilon.$$

于是对  $n > 1/\delta$ ,  $z \in D$ , 有

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} F\left(z, \frac{k}{n}\right) - F(z, s) ds \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| F\left(z, \frac{k}{n}\right) - F(z, s) \right| ds \\ &< \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{n} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

最后, 由定理 1.3.5 立即得  $f$  解析. □

回到命题 2.4.1 上. 依然把  $\tilde{\Gamma}(s)$  拆成  $I_1(s)$  和  $I_2(s)$  两部分, 对  $I_1(s)$ , 它的解析性是上述引理的直接推论; 对  $I_2(s)$ , 对有限区间  $[1, n]$  利用上述引理, 再结合紧集上的一致收敛的性质也可以得到其解析性.

我们现在来验证  $\tilde{\Gamma}(s)$  也满足与  $\Gamma(s)$  相同的函数方程, 并证明当  $\operatorname{Re}(z) > 0$  时,  $\tilde{\Gamma}(z) = \Gamma(z)$ .

利用分部积分, 当  $\operatorname{Re}(z) > 0$  时, 对  $1 < a < b < \infty$  我们有:

$$\int_a^b t^s e^{-t} dt = -t^s e^{-t} \Big|_a^b + z \int_a^b t^{s-1} e^{-t} dt.$$

又

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} a^s e^{-a} = \lim_{b \rightarrow \infty} b^s e^{-b} = 0,$$

所以

$$\tilde{\Gamma}(s+1) = s\tilde{\Gamma}(s).$$

且易知

$$\tilde{\Gamma}(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1.$$

下证明  $\tilde{\Gamma}(z) = \Gamma(z)$ . 令

$$\psi(z) = \frac{\tilde{\Gamma}(z)}{\Gamma(z)},$$

则  $\psi(z)$  在  $\operatorname{Re}(z) > 0$  解析且满足

$$\psi(z+1) = \psi(z), \psi(1) = 1.$$

因此,  $\psi(z)$  可以延拓为定义在整个复平面上的周期函数. 为证明  $\psi(z)$  为常值函数, 我们令  $z = x + iy$ , 来估计

$$A(y) = \sup_{1 \leq x \leq 2} |\psi(x + iy)|.$$

对  $\tilde{\Gamma}$ , 有:

$$\sup_{1 \leq x \leq 2} |\tilde{\Gamma}(x + iy)| \leq \sup_{1 \leq x \leq 2} \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = C_1 < \infty.$$

其中,  $C_1 > 0$  为常数.

对  $\Gamma$ , 有:

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq x \leq 2} \frac{1}{\Gamma(x + iy)} &\leq |2 + iy| e^{2\gamma} \sup_{1 \leq x \leq 2} \left| \prod_{n \geq 1} \left( 1 + \frac{x + iy}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}} \right| \\ &\leq C_2(1 + |y|) \sup_{1 \leq x \leq 2} \prod_{n \geq 1} \left| 1 + \frac{iy}{n} \right| \underbrace{\left| 1 + \frac{x}{n} \right| e^{-\frac{x}{n}}}_{\leq 1} \\ &\leq C_2(1 + |y|) \prod_{n \geq 1} \left( 1 + \frac{y^2}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

其中,  $C_2 > 0$  为常数.

又由 (2-8) 式, 得

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

所以当  $|y| \geq 1$  时,

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq x \leq 2} \frac{1}{\Gamma(x + iy)} &\leq C_2(1 + |y|) \left| \frac{\sin \pi iy}{\pi iy} \right|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_2(1 + |y|) \left( \frac{e^{\pi|y|} + e^{-\pi|y|}}{2\pi|y|} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq C_3 e^{\pi|y|}.$$

其中,  $C_3 > 0$  为常数.

因此对某个常数  $C > 0$  及  $|y| \geq 1$ , 有:

$$A(y) = \sup_{1 \leq x \leq 2} |\psi(x + iy)| \leq C e^{\pi|y|}. \quad (2-20)$$

而  $\psi$  是解析函数, 故上式对所有  $y \in \mathbb{R}$  成立.

因为  $\psi(z+1) = \psi(z)$ , 所以函数

$$h(w) := \psi\left(\frac{1}{2\pi i} \log w\right)$$

在  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  上有定义且取值与  $\log$  的分支无关, 从而  $h(w)$  在  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  上解析, 且  $h(e^{2\pi iz}) = \psi(z)$ . 于是 (2-20) 式可以改写为: 对任意  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,

$$\begin{aligned} |h(w)| &= |h(e^{2\pi iz})| \leq C e^{\pi|y|} = C \max(e^{\pi y}, e^{-\pi y}) \\ &= C \max\left(|e^{2\pi iz}|^{\frac{1}{2}}, |e^{2\pi iz}|^{-\frac{1}{2}}\right) = C \max(|w|^{\frac{1}{2}}, |w|^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (2-21)$$

我们断言  $h(w)$  为常数, 从而  $\psi(z) = \psi(1) = 1$  为常数,  $\tilde{\Gamma}(z) = \Gamma(z)$ . 理由如下: 考虑  $h(w)$  的 Laurent 展开式

$$h(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n w^n.$$

其中,  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} w^{-n-1} h(w) dw$ . 由 (2-21) 式, 得

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R R^{-n-1} \max\left(R^{\frac{1}{2}}, R^{-\frac{1}{2}}\right) = R^{-n} \left(R^{\frac{1}{2}}, R^{-\frac{1}{2}}\right).$$

故当  $n > 0$  时,  $\lim_{R \rightarrow \infty} |c_n| = 0$ , 当  $n < 0$  时,  $\lim_{R \rightarrow 0} |c_n| = 0$ , 从而  $h = c_0$  为常数.

综上, 我们得到了下述定理:

**定理 2.4.3** 当  $\operatorname{Re}(z) > 0$  时,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (2-22)$$

**注 2.4.4** Stein 书 [1] 第六章第 1 小节同样是讨论  $\Gamma$  函数, 但其讲法与这里正好相反: 先通过积分形式给出  $\Gamma$  函数, 然后将它解析开拓成整个复平面上的亚纯函数 (在负整数  $z = -n$  处有单极点, 留数为  $(-1)^n n!$ ), 再根据 Hadamard 定理 (Weierstrass 定理 (即定理 2.2.7) 的改良版) 导出它与利用无穷乘积表达的  $\Gamma$  函数的等价性.

最后, 利用  $\Gamma$  函数我们还可以得到著名的 Stirling 公式, 感兴趣的同学请查阅 [2] 第五章第 2 小节.

## 2.5 浅谈群上的 Fourier 变换与 Mellin 变换

这一小节,我们将初步介绍 Mellin 变换和群上的 Fourier 变换,为引入黎曼  $\zeta$  函数做铺垫. 由于同学们可能没有 Haar 测度的背景知识,这里的讨论将只是启发性的,部分内容并不严格.

关于 Fourier 变换的参考书目有很多,例如 Stein 书 [1] 的第四章和他专门介绍 Fourier 分析的书籍 [25]. 更深入的书籍如 Dinakar Ramakrishnan 的 [26], 请感兴趣的同同学查阅.

我们知道,若函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  满足

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < \infty,$$

则可以定义

$$\mathcal{F}f(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ixt} dt, \quad (2-23)$$

称之为  $f$  的 Fourier 变换.

这其实可以看作一般 Fourier 变换的特例. 我们知道,  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$  等等都构成 Abel 群, 由此受到启发, 考虑 Fourier 变换在一些具有拓扑结构的 Abel 群上的推广, 为刻画之, 引入“拓扑群”的概念.

**定义 2.5.1** 设  $(G, \cdot)$  为一个群, 若在  $G$  上有拓扑  $\tau$ , 使得  $G$  上的运算  $m$  和取逆  $i$

$$\begin{aligned} m: G \times G &\rightarrow G, & i: G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh, & g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

都连续, 则称  $G$  为拓扑群.

例如, 设数域  $k = \mathbb{R}$  或  $\mathbb{C}$ , 则  $k^* := k \setminus \{0\}$  和一般线性群  $GL_n(k)$  在欧氏拓扑下为拓扑 (乘法) 群;  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$  在欧氏拓扑下为拓扑 (加法) 群.

与 (2-23) 式中 Fourier 变换在平移  $t \mapsto t + h$ ,  $\forall h \in \mathbb{R}$  下不变类似, 我们希望积分

$$\int_G f(g) dg$$

在  $g$  的“平移”下也不变, 即

$$\int_G f(g_1 g) dg = \int_G f(g) dg, \quad \forall g_1 \in G.$$

其中,  $f$  是从  $G$  到  $\mathbb{C}$  的函数. 易知映射  $f \mapsto \int_G f(g) dg$  为线性映射.

现在我们不严格地给出一般 Fourier 变换的形式定义. 设  $G$  为拓扑 Abel 群,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  是满足“适当条件”的函数 (这里只考虑  $G = \mathbb{R}$  或  $\mathbb{R}^+$  等特例, 故不对一般性

的条件做介绍),  $\chi: G \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  是连续的群同态, 则称

$$\mathcal{F}f := \int_G f(g)\chi(g) dg$$

为  $f$  的 Fourier 变换.

容易看出, (2-23) 式即是  $G = \mathbb{R}$ ,  $\chi(t) = e^{ixt}$  的特例.

也可以只要求  $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ . 特别地, 复 Fourier 变换 (Fourier-Laplace 变换) 定义如下:

$$\mathcal{F}f(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{zt} dt, \forall z \in \mathbb{C}.$$

可以证明, 当  $f$  为具有紧支集连续函数时,  $\mathcal{F}f(z)$  为整函数.

我们知道,  $(\mathbb{R}^+, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$ , 同构映射即为  $t \mapsto e^t$ . 那么, 对连续群同态

$$\chi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad t \rightarrow t^z = e^{z \log t},$$

相应的满足平移不变性的积分是什么呢?

回答并不困难. 可以取

$$\int_0^\infty f(t) \frac{dt}{t}.$$

理由很简单:

$$\int_0^\infty f(t) \frac{dt}{t} = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(e^t)}_{\text{记为 } g(t)} \frac{e^t dt}{e^t} = \int_{\mathbb{R}} g(t) dt,$$

而右端的积分在平移下不变. 这时一个适当条件就可以为  $f(e^t)$  绝对可积.

由此引出 Mellin 变换, 即在  $\mathbb{R}^+$  上的复 Fourier 变换的定义: 设  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  绝对可积, 则  $f$  的 Mellin 变换为

$$\int_0^\infty t^z f(t) \frac{dt}{t} = \int_0^\infty t^{z-1} f(t) dt.$$

由此, 上一小节中提及的积分形式的  $\Gamma$  函数  $\tilde{\Gamma}$  (即 (2-19) 式) 就是  $f(t) = e^{-t}$  的 Mellin 变换. 那么对于一族函数  $f_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$ ,  $\lambda > 0$  而言, 有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^z e^{-\lambda t} \frac{dt}{t} &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{\lambda}\right)^z e^{-\lambda(\frac{t}{\lambda})} \frac{dt}{t} \\ &= \lambda^{-z} \int_0^\infty t^z e^{-t} \frac{dt}{t} \\ &= \lambda^{-z} \Gamma(z). \end{aligned}$$

换言之, 我们证明了

**命题 2.5.2** 对  $\lambda > 0, \operatorname{Re}(z) > 0$ , 有

$$\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-\lambda t} dt = \lambda^{-z} \Gamma(z).$$

记  $\mathbb{R}$  上函数  $f$  的 Fourier 变换为  $\hat{f}$ , 其中

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

对于这类 Fourier 变换, 我们假定  $f$  可以解析延拓到某个包含实轴的水平条带  $S_a$  (见下述定义 2.5.3), 并给出一种适当条件的含义.

**定义 2.5.3 (类  $\mathfrak{F}$ )** 对每个  $a > 0$ , 设  $f$  满足以下两个条件

(1)  $f$  在区域

$$S_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| < a\}$$

上解析;

(2) 存在常数  $A > 0$ , 使得

$$|f(x + iy)| \leq \frac{A}{1 + x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ 且 } |y| < a.$$

记这样的  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  全体为类  $\mathfrak{F}_a$ . 定义类  $\mathfrak{F} = \cup_{a>0} \mathfrak{F}_a$ ,

对于在类  $\mathfrak{F}$  中的函数  $f$ , 可以证明  $\hat{f}$  依指数衰减, 且满足 Fourier 逆变换公式, 感兴趣的同学请查阅 [1] 第四章第 2 节. 这里我们只证明 Poisson 求和公式.

**定理 2.5.4 (Poisson 求和公式)** 设  $f \in \mathfrak{F}$ , 则

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n). \quad (2-24)$$

证明: 不妨设  $f \in \mathfrak{F}_a$ , 取  $0 < b < a$ . 函数  $1/(e^{2\pi iz} - 1)$  在整数  $n$  处有单极点. 因此  $f(z)/(e^{2\pi iz} - 1)$  在整数  $n$  处有单极点, 留数为  $f(n)/2\pi i$ . 对如下图所示的积分围道  $\gamma_N$ ,  $N \in \mathbb{N}^+$  应用留数定理, 得

$$\sum_{|n| \leq N} f(n) = \int_{\gamma_N} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz.$$

由类  $\mathfrak{F}$  中的条件 (1) 得, 上式左端当  $N \rightarrow \infty$  时收敛, 且  $f$  在  $\gamma_N$  中两条垂直于  $x$  轴的线段上的积分趋于 0. 记  $L_1$  和  $L_2$  分别是  $\gamma_N$  中平行于  $x$  轴, 其下方和上方的线段. 那么, 令  $N \rightarrow \infty$  取极限, 有

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \int_{L_1} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz - \int_{L_2} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz. \quad (2-25)$$

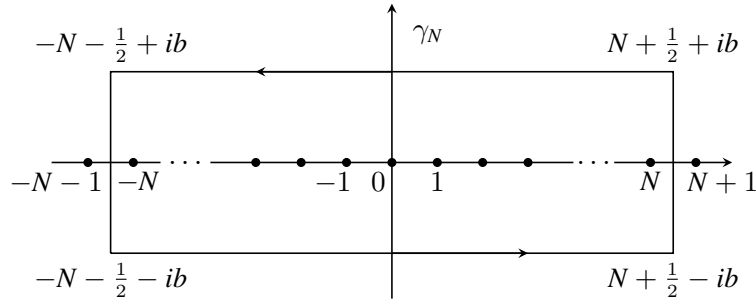


图 2.5.1 证明 Poisson 求和公式所用积分围道

注意到当  $|w| > 1$  时, 有

$$\frac{1}{w-1} = w^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} w^{-n},$$

从而在  $L_1$  上

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = e^{-2\pi iz} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi inz}.$$

同理, 当  $|w| < 1$  时, 有

$$\frac{1}{w-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} w^n,$$

所以在  $L_2$  上

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = - \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi inz}.$$

代入 (2-25) 式, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) &= \int_{L_1} f(z) \left( e^{2\pi iz} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi inz} \right) dz + \int_{L_2} f(z) \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi inz} \right) dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{L_1} f(z) e^{-2\pi i(n+1)z} dz + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{L_2} f(z) e^{2\pi inz} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i(n+1)x} dx + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi inx} dx \quad (\text{为什么?}) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n). \end{aligned}$$

□

我们再给出一种看待 Poisson 求和公式的方式. Poisson 求和公式是正合序列 (Exact

Sequence)

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

就 Fourier 变换给出的信息, 考虑对应关系:

$\mathbb{R}$  上的函数  $\rightsquigarrow$   $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  上的函数

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \rightsquigarrow F(t + \mathbb{Z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + n).$$

在这样的对应关系下, 可以把  $f$  和  $F$  的 Fourier 变换也对应起来.

现在考虑在  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  的 Fourier 变换. 注意到

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \leftrightarrow [0, 1).$$

故对  $G: [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ , 令

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}} G(k) = \int_0^1 G(t) e^{-2\pi i k t} dt.$$

那么, 不严格地有

$$(*) \left\{ \begin{aligned} c_k &=: \mathcal{F}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}} F(k) = \int_0^1 F(t) e^{-2\pi i k t} dt = \int_0^1 \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + n) \right) e^{-2\pi i k t} dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + n) \right) e^{-2\pi i k (t+n)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t) e^{-2\pi i k t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i k t} dt = \hat{f}(k). \end{aligned} \right.$$

从而

$$F(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}.$$

上式右端是  $F$  的 Fourier 级数,  $c_k$  是 Fourier 系数. 如果  $f$  满足“恰当条件”, 那么

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = F(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

这里的恰当条件需要确保两件事情:

- (1)  $(*)$  中的计算是成立的.
- (2)  $F$  的 Fourier 级数点点收敛到  $F$  自身.

对 (1), 若  $f$  绝对可积, 那么  $F$  满足  $\int_0^1 |F| dx < \infty$  且大体而言  $(*)$  中的计算成立. 对 (2),  $F$  的 Fourier 级数在均方意义下收敛到  $F$ , 为使其点点收敛, 一个充分条件可以是要  
求其一致收敛. 例如,  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty$  即可保证.

若  $F$  在区间  $[0, 1]$  上连续 ( $F(1) = F(0)$ ), 那么  $|c_n| \leq \|F\|_{[0,1]} \Rightarrow |c_n| \leq C_1$ . 若  $F$  导函数连续, 那么由分部积分得  $\int_0^1 F'(x)e^{-2\pi inx} dx = 2\pi inc_n \Rightarrow |nc_n| \leq C_2$ . 若  $F$  的二阶导函数也连续, 那么同理得  $|c_n| \leq C_3(1+n^2)^{-1} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty$ . 其中  $C_1, C_2, C_3$  是常数. 因此, 只需使得  $F, F', F''$  存在且连续即可.

可以证明, 若

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f\|_{[n, n+1]} < \infty,$$

则  $F$  连续. 对  $F', F''$  同理.

即: 对函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , 若对  $k = 0, 1, 2$  有

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f^{(k)}\|_{[n, n+1]} < \infty,$$

则 Poisson 求和公式 (2-24) 成立.

**推论 2.5.5** 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  二阶连续可导, 且

$$|f(t)| \leq C_1(1+t^2)^{-1}, |f'(t)| \leq C_2(1+t^2)^{-1}, |f''(t)| \leq C_3(1+t^2)^{-1}.$$

其中,  $C_1, C_2, C_3$  是常数. 则 Poisson 求和公式成立.

值得注意的是, Poisson 求和公式成立要求的条件还可以弱化很多, 例如 [27] 第二章第 2 节的版本. 但对于这里的应用而言, 这些条件已经足够了.

## 2.6 黎曼 $\zeta$ 函数

这一小节, 我们将对黎曼  $\zeta$  函数作初步介绍, 包括乘积公式、函数方程以及其零点分布等等. 在介绍黎曼  $\zeta$  函数时, 我们会不可避免地遭遇  $\vartheta$  函数, 它与下一小节的关注点—— $\Theta$  函数密切相关.

回顾上一小节的命题 2.5.2: 对  $\lambda > 0, \operatorname{Re}(z) > 0$ , 有

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-\lambda t} dt = \lambda^{-z} \Gamma(z).$$

那么, 若取

$$g(t) = \frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 1} e^{-nt},$$

则当  $\operatorname{Re}(s) > 1$  时, (为什么求和与极限可交换次序?)

$$\int_0^\infty t^s \frac{1}{e^t - 1} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \sum_{n \geq 1} t^{s-1} e^{-nt} dt = \Gamma(s) \sum_{n \geq 1} n^{-s}.$$

大名鼎鼎的黎曼  $\zeta$  函数就是

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}.$$

黎曼  $\zeta$  函数也可以用素数的无穷乘积表达, 即

**定理 2.6.1** 对  $\sigma = \operatorname{Re}(s) > 1$ , 有

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-s}). \quad (2-26)$$

**证明:** 收敛性是显然的.

注意到

$$\zeta(s) (1 - 2^{-s}) = \sum n^{-s} - \sum (2n)^{-s} = \sum m^{-s},$$

等式右端是对所有正奇数求和. 同理,

$$\zeta(s) (1 - 2^{-s}) (1 - 3^{-s}) = \sum m^{-s},$$

等式右端是对所有不能被 2 和 3 整除的正整数求和. 一般地, 设  $p_n$  是第  $n$  个素数 (从小到大排列), 则

$$\zeta(s) (1 - 2^{-s}) (1 - 3^{-s}) = \sum m^{-s},$$

等式右端是对所有不能被  $2, 3, \dots, p_n$  整除的正整数求和.

因此, 当  $n$  趋于无穷时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(s) \prod_{k=1}^n (1 - p_k^{-s}) = 1.$$

这就证明了定理. □

由此得知  $\zeta(s)$  在  $\operatorname{Re}(s) > 1$  上无零点.

级数  $\sum_{n \geq 1} n^{-s}$  在  $\operatorname{Re}(s) > 1$  时收敛, 也就是说  $\zeta(s)$  的定义域为  $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1\}$ . 我们希望能将  $\zeta(s)$  的定义与开拓到整个复平面上, 为此证明如下定理:

**定理 2.6.2** 对  $\sigma = \operatorname{Re}(s) > 1$ , 有

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz. \quad (2-27)$$

其中,  $(-z)^{s-1} = e^{(z-1)\operatorname{Log}(-z)}$ , 积分围道  $C$  如下图所示 (圆弧半径  $r$  小于  $2\pi$ ).

**证明:** (2-27) 右端积分收敛是显然的. 由 Cauchy 定理, 积分值与  $C$  的形状无关, 因为  $C$  不包含  $z = 2k\pi i$ , 其中  $k$  为非零整数. 特别地, 可以令  $r$  趋于 0. 此时, 圆弧部分的积

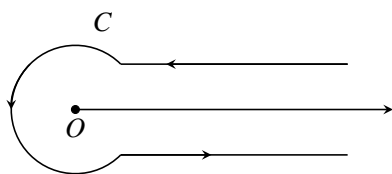


图 2.6.1 证明定理2.6.2所用积分围道

分趋于 0. 在实轴上边缘,  $(-z)^{s-1} = x^{s-1}e^{-(s-1)\pi i}$ ; 在实轴下边缘,  $(-z)^{s-1} = x^{s-1}e^{(s-1)\pi i}$ . 于是我们得到:

$$\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-(s-1)\pi i}}{e^x - 1} dx + \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{(s-1)\pi i}}{e^x - 1} dx = 2i \sin[(s-1)\pi] \zeta(s) \Gamma(s).$$

结合 (2-16) 式即得结论.  $\square$

(2-27) 式的重要性在于等式右端在整个复平面上为亚纯函数, 从而  $\zeta(s)$  可以开拓到整个复平面上. 结合注2.4.4, 可得:

**推论 2.6.3** 黎曼  $\zeta$  函数可以解析开拓成复平面上的亚纯函数, 且在  $s = 1$  处为唯一单极点, 留数为 1.

$z$  函数在非正整数处的值很容易就可以给出. 回忆第一部分习题12.

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} z^{2k-1}.$$

由 (2-27) 式, 得

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{z^{-n-1}}{e^z - 1} dz.$$

因此,  $\zeta(-n)$  等于  $(-1)^n n!$  乘上  $(e^z - 1)^{-1}$  的展开式中  $z^n$  的系数, 于是对正整数  $m$ , 有  $\zeta(0) = -1/2$ ,  $\zeta(-2m) = 0$  且  $\zeta(-2m+1) = (-1)^m B_m / 2m$ . 其中,  $z = -2m$  成为黎曼  $\zeta$  函数的**显然零点**.

最后, 我们介绍黎曼  $\zeta(s)$  所满足的函数方程.

在本小节的开始, 我们利用命题2.5.2得到黎曼  $\zeta$  函数. 更一般地, 还可以考虑函数  $g_k(t) = \sum_{n \geq 1} e^{-nt}$ ,  $k \in \mathbb{N}^+$ , 我们有

$$\int_0^\infty t^s g_k(t) \frac{dt}{t} = \int_0^\infty t^s \left( \sum_{n \geq 1} e^{-nt} \right) \frac{dt}{t} = \Gamma(s) \sum_{n \geq 1} n^{-ks} = \Gamma(s) \zeta(ks).$$

黎曼曾根据  $k = 1, 2$  时的式子推导出  $\zeta(s)$  的函数方程. 由  $k = 1$  时的情形可得

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

具体证明见 [2] 第五章第 4 节. 这里我们重点介绍  $k = 2$  时的情形, 即

$$\int_0^{\infty} t^s \left( \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 t} \right) \frac{dt}{t} = \Gamma(s) \zeta(ks), \quad \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}. \quad (2-28)$$

先证明上式确实是严格成立的. 这是因为

$$\sum_{n \geq 1} e^{-n^2 t} \leq e^{-t} + \int_1^{\infty} e^{-s^2 t} ds \leq e^{-t} + \int_0^{\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{t}} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

其中,  $C > 0$  为常数.

(我们还可以给出更好的估计: 当  $0 < t \leq 1$  时,  $|\psi(t)| \leq C_1/\sqrt{t}$ ; 当  $t \geq 1$  时,  $|\psi(t)| \leq C_2 e^{-\pi t}$ . 其中,  $C_1, C_2$  为常数.)

现在令

$$\vartheta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}, \quad \psi(t) = \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t}.$$

易知

$$\vartheta(t) = 2\psi(t) + 1.$$

可以证明 (见习题 6.)

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \vartheta\left(\frac{1}{t}\right), \quad t > 0. \quad (2-29)$$

它是证明黎曼  $\zeta(s)$  函数所满足的函数方程的关键.

由 (2-29) 式, 得

$$\psi\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\psi(t) + \frac{1}{2}(\sqrt{t} - 1).$$

于是 (2-28) 式可以改写为: 对  $\operatorname{Re}(z) > 1/2$ ,

$$\begin{aligned} \pi^{-z} \zeta(2z) \Gamma(z) &= \int_0^{\infty} t^{z-1} \psi(t) dt \\ &= \int_1^{\infty} t^{z-1} \psi(t) dt + \int_0^1 t^{z-1} \psi(t) dt \\ &= \int_1^{\infty} t^{z-1} \psi(t) dt + \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^{z-1} \psi\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2} \\ &= \int_1^{\infty} \left(t^{z-1} + t^{-z-\frac{1}{2}}\right) \psi(t) dt + \frac{1}{2z(2z-1)}. \end{aligned}$$

令  $w = 2z$ , 则

$$\zeta(w) \Gamma\left(\frac{w}{2}\right) \pi^{-\frac{w}{2}} = \int_1^{\infty} \left(t^{\frac{w}{2}-1} + t^{-\frac{w}{2}-\frac{1}{2}}\right) \psi(t) dt + \frac{1}{w(w-1)}. \quad (2-30)$$

注意到  $|\psi(t)| \leq C_2 e^{-\pi t}$ ,  $\forall t \leq 1$ , 上式右端的积分对任意  $w \in \mathbb{C}$  收敛且是整函数. 因此上式右端是复平面上的亚纯函数, 极点为  $w = 0$  和  $w = 1$ , 留数均是 1. 另外, 上式右端在映射  $w \mapsto 1 - w$  下保持不变, 从而对上式左端有:

$$\pi^{-\frac{w}{2}} \zeta(w) \Gamma\left(\frac{w}{2}\right) = \pi^{-\frac{1-w}{2}} \zeta(1-w) \Gamma\left(\frac{1-w}{2}\right). \quad (2-31)$$

这是黎曼  $\zeta$  函数的另一个函数方程.

为去除  $w = 0$  和  $w = 1$  处的极点, 考虑

$$\xi(w) = \frac{1}{2} w(w-1) \pi^{-\frac{w}{2}} \Gamma\left(\frac{w}{2}\right) \zeta(w). \quad (2-32)$$

则  $\xi(w)$  为整函数, 且  $\xi(w) = \xi(1-w)$ . 注意到  $\Gamma(w/2)$  和  $\pi^{-w/2}$  在  $\operatorname{Re}(w) > 0$  上都没有零点,  $\xi(w)$  与  $\zeta(w)$  在  $\operatorname{Re}(w) > 0$  上零点相同 ( $w = 0, 1$  不是  $\xi(w)$  的零点). 因此,  $\zeta(s)$  在  $\operatorname{Re}(s) > 0$  上的零点满足  $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$ .

可以证明, 函数  $\xi$  增长的阶为 1, 即

$$|\xi(z)| \leq C e^{|z|(1+\varepsilon)}.$$

其中  $\varepsilon$  为任意大于 0 的常数, 常数 1 不能被改进. 由 Hadamard 定理, 知:

$$\xi(w) = A e^{Bw} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{w}{\rho_n}\right) e^{\frac{w}{\rho_n}},$$

其中  $\sum_{n \geq 1} |\rho_n|^{-1} = \infty$ ,  $\sum_{n \geq 1} |\rho_n|^{-2} < \infty$ ,  $A = -1/2$ ,  $B = -\gamma/2 - 1 + (1/2) \log 4\pi$ .

对这部分内容, 感兴趣的同学可以查阅例如 S. J. Patterson 的 [28] 等书籍.

## 2.7 $\Theta$ 函数

这一小节, 我们将把实值函数  $\vartheta$  搬运到复分析来, 讨论一族与实值函数  $\vartheta$  相关的  $\Theta$ -函数. 回顾  $\vartheta$  的定义:

$$\vartheta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}, \quad x > 0. \quad (2-33)$$

自然可以把上式推广到右半平面  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$  上. 方便起见, 我们将右半平面旋转到上半平面  $\mathbb{H}$  来, 考虑

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z}, \quad z \in \mathbb{H}.$$

$\theta(z)$  有以下性质:

**命题 2.7.1** 对  $z \in \mathbb{H}$ , 有

$$\theta(z+2) = \theta(z), \quad \theta\left(-\frac{1}{z}\right) = (-iz)^{\frac{1}{2}} \theta(z).$$

其中, 我们取函数  $z^{1/2}$  在  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  上的分支.

证明: 第一条性质是显然的, 且易知第二条性质在  $z \in i(0, \infty)$  上成立 (由 (2-29) 式), 根据  $\theta$  解析即得该性质对所有  $z \in \mathbb{H}$  成立.  $\square$

注意到映射  $z \mapsto z + 2, z \mapsto -1/z$  都是上半平面  $\mathbb{H}$  的自同构, 这体现出  $\theta$  怎样的对称性呢?

回顾1.5小节, 我们有:

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) \cong \text{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm I_2\}$$

在同构下, 有对应关系

$$z \mapsto z + 2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \mapsto -1/z \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

考虑由上述两个矩阵生成的  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  的子群  $A$ . 容易验证,  $A$  包含

$$\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对自然同态  $\varphi: \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$ , 有

$$|\varphi(A)| = 2, [\text{SL}(2, \mathbb{Z}_2) : A] = 3.$$

对  $A$  中一般的元素, 它会对  $\theta(z)$  中的因子  $(-iz)^{1/2}$  产生什么样的影响呢? 笼统地说, 我们有

$$\theta(z) = \xi(cz + d)^{-\frac{1}{2}} \theta\left(\frac{az + b}{cz + d}\right). \quad (2-34)$$

其中,  $\xi$  是某个 8 次单位根. 这里恕不讲述这个复杂的故事.

**注 2.7.2** 从这两小节的讨论中, 可以看出 Mellin 变换将  $\theta$  函数与  $\zeta$  函数联系起来. 更一般地, 它把满足类似于 (2-34) 式所给出的函数方程的函数与和  $\zeta$  函数有类似性质的函数联系起来, 这将指引我们行至更深的地方.

让我们把目光移回来.  $\theta(z)$  可以看作双变量函数  $\Theta(z|\tau), (z, \tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ :

$$\Theta(z|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z} \quad (2-35)$$

的特例. 实际上,  $\Theta(z|\tau)$  函数是一组函数  $\Theta_{a,b}(z|\tau), a, b \in \{0, 1\}$  中之一, 为  $\Theta_{0,0}$ .

为什么要把定义域调整为  $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$  呢? 有两个原因: 第一、我们将会看到,  $\Theta(z|\tau)$  与自变量为  $z$  的双周期函数 (周期为 1 和  $\tau$ ) 有关; 第二、函数  $\Theta(z|\tau)$  是在  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  上热传导方程的基本解 (见习题7.) .

先来检验  $\Theta(z|\tau)$  在  $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$  上的收敛性. 这是容易的, 因为

$$\left| e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z} \right| = e^{-\pi n^2 \operatorname{Im}(\tau) - 2\pi n \operatorname{Im}(z)}$$

就确保了收敛性.

现在探讨函数  $\Theta(z|\tau)$  与双周期函数的联系. 计算:

$$\begin{aligned} \Theta(z+1|\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n(z+1)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z} \\ &= \Theta(z|\tau). \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \Theta(z+\tau|\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n(z+\tau)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (n+1)^2 \tau - \pi i \tau + 2\pi i n z} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (n+1)^2 \tau - 2\pi i (n+1)z - \pi i \tau - 2\pi i z} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau - 2\pi i n z - (\pi i \tau + 2\pi i z)} \\ &= \Theta(z|\tau) e^{-\pi i \tau - 2\pi i z} \end{aligned}$$

所以  $\Theta(z|\tau)$  与自变量为  $z$ , 周期为 1 和  $\tau$  双周期函数非常接近. 因子  $e^{-\pi i \tau - 2\pi i z}$  在对数二阶导数

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \Theta(z|\tau)$$

下就会消失. 即对每个  $\tau$ , 该函数为  $z$  的双周期函数.

关于函数  $\Theta(z|\tau)$  的解析性. 对于区域  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  上的多复变函数  $F(z_1, \dots, z_n)$ , 若逐点对每个变量  $z_k$ ,  $1 \leq k \leq n$  都满足 Cauchy-Riemann 方程:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} F = 0,$$

其中  $\partial/\partial \bar{z} = (1/2)(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$ , 则称它在区域  $\Omega$  上解析. 可以证明: 若  $F_1, F_2$  都在一点解析, 那么  $F_1 \cdot F_2$  也在该点解析. 若单复变函数  $f$  和多复变  $F$  都在定义域内解析, 那么函数  $f \circ F$  也在定义域内解析. 总而言之, 可以证明函数  $\Theta(z|\tau)$  是解析的.

函数  $\Theta(z|\tau)$  还有其他性质, 例如

$$\Theta\left(z + \frac{1}{2}|\tau + 1\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n \tau + \pi i (n^2 + n)} = \Theta(z|\tau).$$

接下来我们介绍带特征的  $\Theta$  函数. 令

$$\Theta_{a,b}(z|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(n+a)^2 \tau + 2\pi i(n+a)(z+b)} = e^{\pi i a^2 \tau + 2\pi i a(z+b)} \Theta(z + a\tau + b|\tau).$$

其中有四个函数非常重要, 对应  $a, b \in \{0, 1/2\}$  的四种情形. 这里为记号简便, 将之分别记为

$$\begin{aligned} \Theta_{0,0}(z|\tau) &= \Theta(z|\tau); \\ \Theta_{0,1}(z|\tau) &= \Theta\left(z + \frac{1}{2}|\tau\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z}; \\ \Theta_{1,0}(z|\tau) &= \Theta\left(z|\tau + \frac{1}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(n^2+n)\tau + 2\pi i n z} e^{\frac{\pi i \tau}{4} + \pi i z}; \\ \Theta_{1,1}(z|\tau) &= \Theta\left(z + \frac{1}{2}|\tau + \frac{1}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(n^2+n)\tau + \frac{\pi i \tau}{4} + 2\pi i n z + \pi i z + \pi i n + \frac{\pi i}{2}}. \end{aligned}$$

另外, 记  $p = e^{\pi i z}$ ,  $q = e^{\pi i \tau}$ , 从而  $z \in \mathbb{C} \Rightarrow p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\tau \in \mathbb{H} \Rightarrow 0 < |q| < 1$ . 因此

$$\begin{aligned} \Theta_{0,0}(z|\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} p^{2n}; \\ \Theta_{0,1}(z|\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} p^{2n}; \\ \Theta_{1,0}(z|\tau) &= q^{\frac{1}{4}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2+n} p^{2n+1}; \\ \Theta_{1,1}(z|\tau) &= i \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} p^{2n+1}. \end{aligned}$$

它们在组合数学中有所应用, 感兴趣的同学请查阅 [1] 第十章第 2 节.

给出  $\Theta_{(a,b)}(z|\tau)$  的这些公式, 可以由算子  $S_b, T_a$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  表示. 其中,

$$\begin{cases} (S_b f)(z) = f(z + b), \\ (T_a f)(z) = f(z + a\tau) e^{\pi i a^2 \tau + 2\pi i a z}. \end{cases}$$

如果  $f$  在  $\mathbb{C}$  上解析, 那么变换后的函数也解析. 可以验证:

$$\begin{aligned} S_b T_a \Theta(z|\tau) &= S_b \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i(z+a\tau)n + \pi i a^2 \tau + 2\pi i a z} \\ &= S_b \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(n+a)^2 \tau + 2\pi i z(n+a)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(n+a)^2 \tau + 2\pi i(z+b)(n+a)} \\ &= \Theta_{a,b}(z|\tau). \end{aligned}$$

下面讨论  $\Theta(z|\tau)$  的零点. 与椭圆函数类似, 有

$$\Theta(z_0|\tau) = 0 \Leftrightarrow \Theta(z_0 + k\tau + lz) = 0, \forall k, l \in \mathbb{Z}.$$

因此我们也只需考虑一个平行四边形

$$P_w = \{z \in \mathbb{C} \mid z = w + a + b\tau, 0 \leq a < 1 \text{ 且 } 0 \leq b < 1\}$$

内  $\Theta(z|\tau)$  的零点即可.

我们总选取适当的  $w$ , 使得  $P_w$  的边界上不含其零点.

**引理 2.7.3** 对函数  $\Theta(z|\tau)$ , 有

$$\Theta(z_0|\tau) = 0 \Leftrightarrow z_0 \in \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)(\tau + 1).$$

**证明:** 考虑如上  $P_w$  内函数  $\Theta(z|\tau)$  的零点个数, 记为  $l$ . 根据辐角原理, 有

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{2\pi i} \int_{P_w} \frac{d}{dz} \log \Theta(z|\tau) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{[a, a+1]} - \int_{[a+\tau, a+1+\tau]} \right\} + \left\{ \int_{[a+1, a+1+\tau]} - \int_{[a, a+\tau]} \right\} \left( \frac{d}{dz} \log \Theta(z|\tau) dz \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_a^{a+1} \frac{d}{dz} (\log \Theta(z|\tau) - \log \Theta(z + \tau|\tau)) dz + 0 \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^{a+1} \frac{d}{dz} (e^{\pi i \tau + 2\pi i z}) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^{a+1} 2\pi i dz \\ &= 1. \end{aligned}$$

即在  $P_w$  存在  $\Theta(z|\tau)$  的唯一简单零点.

因为  $\Theta(z|\tau) = \Theta(-z|\tau)$ , 所以

$$\Theta(z_0|\tau) = 0 \Leftrightarrow \Theta(-z_0|\tau) = 0.$$

从而

$$-z_0 = z_0 + k\tau + l, k, l \in \mathbb{Z}.$$

即:

$$z_0 = \frac{k}{2}\tau + \frac{l}{2}.$$

在模  $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  意义下, 有四种可能:  $0, \tau/2, 1/2, \tau/2 + 1/2$ . 其中恰有一个为零点.

下证  $\Theta(\tau/2 + 1/2|\tau) = 0$ .

注意  $\Theta(a\tau + b|\tau) = 0 \Leftrightarrow \Theta_{a,b}(0|\tau) = 0$ , 因此只需证明  $a = b = \frac{1}{2}$  时,  $\Theta_{a,b}(0|\tau) = 0$ , 即在这里的记号下  $\Theta_{1,1}(0|\tau) = 0$ .

若能证明  $\Theta_{1,1}(z|\tau) = -\Theta_{1,1}(-z|\tau)$ , 则结论得证. 而计算, 得:

$$\begin{aligned}\Theta_{1,1}(-z|\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(n+\frac{1}{2})^2 \tau + 2\pi i(n+\frac{1}{2})(-z+\frac{1}{2})} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(-m-\frac{1}{2})^2 \tau + 2\pi i(-m-\frac{1}{2})(-z-\frac{1}{2}) - 2\pi i(m+\frac{1}{2})} \\ &= -\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(m+\frac{1}{2})^2 \tau + 2\pi i(m+\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2}) - 2\pi i(m+\frac{1}{2})} \\ &= -\Theta_{1,1}(z|\tau).\end{aligned}$$

□

**推论 2.7.4** 对  $\Theta_{1,1}(z|\tau)$  而言, 它有且只有简单零点, 且位于

$$\frac{-2a+1}{2}\tau + \frac{-2b+1}{2} + \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}.$$

最后, 我们不加证明地介绍两个结果.

**定理 2.7.5** 亚纯函数

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \Theta_{1,1}(z|\tau)$$

是双周期函数, 其极点仅在  $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  处, 阶数均为 2. 且有等式

$$-\frac{d^2}{dz^2} \log \Theta_{1,1}(z|\tau) + C = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \left( \frac{1}{[z - (m+n\tau)]^2} - \frac{1}{(m+n\tau)^2} \right), \quad (2-36)$$

其中  $C$  为常数.

上式的证明可见 David Mumford 的 [29], 而式中右端函数就是下一小节我们要介绍的 Weierstrass  $\wp$ -函数.

**定理 2.7.6 (乘积公式)** 对函数  $\Theta(z|\tau)$ , 有

$$\Theta(z|\tau) = \prod_{n \geq 1} (1 - q^{2n}) \prod_{m \geq 1} (1 + q^{2m-1} p^2) (1 + q^{2m-1} p^{-2}). \quad (2-37)$$

它的证明可见 [1] 第十章第 1 节, 大致思路是先证明左右端函数满足同样的函数方程、具有相同的零点, 后证明函数之比为 1.

## 2.8 椭圆函数 (二) : Weierstrass $\wp$ -函数

在这本笔记的最后, 我们将再探椭圆函数. 与初探椭圆函数时从几何角度出发不同, 在这里我们将以级数的视角, 讨论一个特殊的椭圆函数——Weierstrass  $\wp$ -函数.

在第1.8小节中, 我们已经证明了非常值椭圆函数的阶至少是 2, 那么能否构造出阶恰为 2 的椭圆函数的例子呢?

一个直接的想法可能是

$$\sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z - \omega)^2},$$

其中  $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ,  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  且比值不为实数. 我们把这样的  $L$  称为复平面上的格 (Lattice).

但它不是绝对收敛的, 因此我们需要利用 Einstein 求和法, 想办法添加一些抵消项. 为此先证明两个引理.

### 引理 2.8.1 级数

$$\sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

收敛当且仅当  $\alpha > 1$ .

证明: 类比 Cauchy 积分判别法, 原级数和积分

$$I = \int_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

同敛散. 对积分  $I$ , 利用极坐标变换, 得

$$I = \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \frac{r dr d\varphi}{r^{2\alpha}} = 2\pi \int_1^\infty \frac{dr}{r^{2\alpha-1}}.$$

上式右端收敛当且仅当  $2\alpha - 1 > 1$  即  $\alpha > 1$ . □

由此得到:

### 引理 2.8.2 设 $L \subset \mathbb{C}$ 为格. 级数

$$\sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} |\omega|^{-s}, \quad s > 2,$$

收敛.

证明: 记

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2.$$

其中,  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  且比值不为实数.

由引理2.8.1, 只需证明

$$|n\omega_1 + m\omega_2|^2 \leq \delta (m^2 + n^2),$$

对某个  $\delta > 0$  (取决于  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ) 成立. 而这由紧集上连续函数的性质就可以得到. 令

$$f(x, y) = \frac{|x\omega_1 + y\omega_2|^2}{x^2 + y^2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

由  $f$  齐次, 只需证明  $f$  在  $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  上有正的最小值即可, 注意到  $S^1$  为紧集即可.  $\square$

有了这两个引理, 就不难找到添加抵消项的办法了.

**命题 2.8.3** 设  $M = L \setminus \{0\}$ , 则级数

$$\sum_{\omega \in M} \left[ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]$$

在  $\mathbb{C} \setminus M$  上一致收敛, 从而解析.

证明: 注意到

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \frac{|z||z - 2\omega|}{|\omega|^2|z - \omega|^2},$$

结合引理 2.8.2 即可. 个中的手法与证明 Mittag-Leffler 定理所用别无二致, 我们已经见过多次.  $\square$

现在我们可以严格定义 Weierstrass  $\wp$ -函数了.

**定义 2.8.4 (Weierstrass  $\wp$  函数)** 函数

$$\wp(z; L) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left[ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right], z \in \mathbb{C} \setminus L \quad (2-38)$$

被称为格  $L$  上的 Weierstrass  $\wp$ -函数.

综上所述, 我们有:

**命题 2.8.5** 格  $L$  上的 Weierstrass  $\wp$  函数为复平面上的亚纯函数, 其极点在格  $L$  上, 阶数为 2. Weierstrass  $\wp$ -函数是偶函数, 从而在原点处其洛朗展开式为

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$$

Weierstrass  $\wp$ -函数的导函数为

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z - \omega)^3},$$

它在  $L$  上的点处为 3 阶极点, 在  $\mathbb{C} \setminus L$  上解析, 且为奇函数.

下面我们证明 Weierstrass  $\wp$ -函数确实为椭圆函数.

**命题 2.8.6** 格  $L$  上的 Weierstrass  $\wp$  函数是 2 阶椭圆函数, 其导函数为 3 阶椭圆函数.

证明: 首先考虑  $\wp'$ . 容易验证, 它确实是双周期的. 但对  $\wp$  函数我们不能这么做. 由此, 我们考虑

$$\wp(z + \omega_i) - \wp(z), \quad i = 1, 2.$$

由  $\wp$ -函数的导函数的周期性, 知上式为常数. 再令  $z = -\omega_i/2$ , 由  $\wp$ -函数是偶函数即得常数为 0. 从而  $\wp$ -函数也是椭圆函数.  $\square$

关于函数  $\wp'$  的零点, 我们有

**命题 2.8.7** 点  $a \in \mathbb{C}$  是  $\wp'$  的零点当且仅当

$$a \notin L \text{ 且 } 2a \in L.$$

在一个周期平行四边形中,  $\wp'$  恰有 3 个简单零点.

证明: 设  $a$  是一个满足条件的点. 那么,

$$\wp'(a) = \wp'(a - 2a) = \wp'(-a) = -\wp'(a) \Rightarrow \wp'(a) = 0.$$

于是在模  $L$  意义下,  $\wp'$  有三个零点, 分别是

$$\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2} \text{ 和 } \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

$\square$

**注 2.8.8** 我们记

$$e_1 := \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 := \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad e_3 := \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right).$$

那么,  $e_1, e_2, e_3$  两两不等 (为什么?) 且与基  $\omega_1, \omega_2$  的选取无关.

最后, 令  $\tau = \omega_1/\omega_2$ , 并考虑函数

$$\lambda(\tau) = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2},$$

它将把我们再次引入到模函数上. 可以证明:

$$\lambda\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \lambda(\tau), \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2},$$

且  $\lambda$  满足函数方程

$$\lambda(\tau + 1) = \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau) - 1}, \quad \lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right) = 1 - \lambda(\tau).$$

作为共形映射,  $\lambda(\tau)$  也有很好的性质.

**定理 2.8.9** 模函数  $\lambda(\tau)$  把区域  $Q$  (见图 1.9.2, 记得吗? 我们在 1.9 小节介绍过这两个区域间的共形映射!) 共形地映到上半平面, 且可以连续延拓到边界, 使得  $\tau = 0, 1, \infty$  分别对应  $\lambda = 1, \infty, 0$ .

有关这部分内容和上述定理的证明, 感兴趣的同学可以查阅 [2] 第七章第 3 节.

## 2.9 习题

1. 证明:

$$\sin \pi(z + \alpha) = \sin \pi\alpha e^{\pi z \cot \pi\alpha} \prod_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 + \frac{z}{n + \alpha}\right) e^{-\frac{z}{n + \alpha}}.$$

其中,  $\alpha \in \mathbb{C}$  不是整数. 计算  $\alpha \rightarrow$  时的极限.

2. 用两种办法证明:  $\log \Gamma(t)$  是  $(0, \infty)$  上的凸函数.

3. 利用  $\Gamma(z)$  的对数导数, 证明 Legendre 倍元公式<sup>[1]</sup>:

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2z) = 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

4. 设  $\operatorname{Re}(z) > 0$  且  $\operatorname{Re}(w) > 0$ . 令

$$B(z, w) = \int_0^1 (1-t)^{z-1} t^{w-1} dt.$$

证明:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

[提示: 考虑

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{z-1} s^{w-1} e^{-t-s} dt ds,$$

并作变量替换  $s = ur, t = u(1-r)$ .]

5. 证明: 当  $\operatorname{Re}(z) > 1$  时,

$$-\frac{d}{dz} \log \zeta(z) = \sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda(n)}{n^z}.$$

其中,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{if } n = p^k, p \in \mathbb{P}; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

是著名的 Von Mangoldt 函数.

[1]. 这里将 Ahlfors 书 [2] 中第 200 页“Legendre’s duplication formula”暂译为“Legendre 倍元公式”.

6. 利用 Poisson 求和公式证明 (2-29) 式.

7. 设  $x \in \mathbb{R}$  且  $t \in (0, \infty)$ , 令  $u(x, t) = \Theta(x, it)$ .

(1) 证明:  $u(x, t)$  是  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  上的实值函数, 对变量  $x$  以 1 为周期, 且满足微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (4\pi)^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(2) 设  $P(x) = \sum_m c_m e^{2\pi i m x}$  (有限和) 是三角多项式. 证明:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 P(x) u(x, t) dx = P(0).$$

## 写在最后的话

自四月底至七月下旬, 经过接近三个月伏案, 这份笔记已经接近尾声了. 一件事情结束, 总要有所总结. 因此, 倘若“写在前面的话”是给予读者的赠言, 那么“写在后面的话”则更偏向于留给自己的感悟和思考.

九十页的笔记虽不长, 但对于一个普通的大三学生来说, 无疑是浩大的工程. 尽管有教授的部分讲稿支持, 有老师和学长、同学们帮助, 可从构思整理、内容取舍, 到证明方法、技术细节, 点点滴滴仍染是不小的考验. 因此, 每想起张筑生先生呕心沥血五年编著成的《数学分析新讲》三卷; 想起丘维声爷爷三尺讲台四十年沉淀出的《高等代数》, 就由衷地对这些教授们心生敬佩了.

一路走来, 笔记渐渐由薄到厚, 自己心态也改变了许多. 初为作者时的满心的激动和欣喜早已烟消云散, 有过碰到诸多问题时的气馁, 也有过对自己能力的质疑和沮丧, 有过紧咬牙关时坚持下来的希望, 还有如今敲下这些文字的平和.

毫无疑问, 撰写一份笔记, 笔者的肩上责任重大. 尤其是对于深知自己学问尚浅, 功底薄弱的学生而言, 更有几分班门弄斧, 不自量力的味道. 理应“少年读书, 老年读书”, 那么为何笔者依然坚持呢? 大抵是看到了自己的不足, 希望更多的同学有机会开阔数学视野, 走得更远吧.

回顾这份笔记, 笔者想谈谈两方面的感受: 对数学理论美的赞叹, 对笔记中诸多不足的反思.

总而言之, 赞叹有三.

第一, 数学各分支是紧凑而互相交织的. 数学家 Marie-Sophie Germain 有句名言: 代数是书写的几何, 几何是图形的代数. 大数学家 Michael Atiyah 更是有著作《数学的统一性》. 对我而言, MATH 205 这门课, 以及这份小小的笔记, 使我初步意识到复分析与几何、代数也称得上是水乳交融, 彼此相通.

第二, 数学常常于平凡之中蕴藏伟大. 数学从不只是高屋建瓴, 它们常是从许多不起眼的现象, 或是看似简单的问题出发的, 因此具体的例子非常重要. 比如, 多边形的共形映射就可以为我们打开模形式的大门; Mittag-Leffler 定理与 Weierstrass 定理的高维推广需要利用同调与层论才能解决; 从 Poisson 求和公式可以引出黎曼  $\zeta$  函数与 Jacobi  $\Theta$  函数的联系等等, 它们一步步引领我们到更深刻的数学中去.

第三, 数学是人类思维的磨刀石. 它包含了许多天马行空的想象, 以及出人意料的证明, 如双曲几何的两个模型所具有的一系列奇特美妙的性质, 两种不同定义的  $\Gamma$  函数竟然可以殊途同归,  $\Theta$  函数是  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  上热传导方程的解……

这些都是数学的独特魅力,它们无不给人以醍醐灌顶之感,使人心醉神往.

于此同时,反思也有三.

第一,由于笔者水平非常有限,不少话题份量不足,有浅尝辄止之嫌.第1.4和2.3小节涉及同调的知识笔者不曾接触,所以无从谈起;第1.8、1.10和2.5小节中的讨论并不深入,只谈及了一些皮毛;第1.11小节仅仅介绍了最基本的知识,甚至没有提及双曲平面上三角形的面积由角度唯一确定的性质,更没有给出理论结果的严格证明.

第二,笔记中各小节的顺序未必恰当.大体上,笔记是按照 Dan-Virgil Voiculescu 教授的讲座写成的,但增添、补充了不少内容和细节,因此知识的衔接难免不够顺畅.例如,笔者把椭圆函数拆为两部分,第二部分需要用到第2.1的思想方法,但并没有把它们整合在一起.

第三,笔者有些偷懒之处.这份笔记借鉴了 [1], [2] 书中的不少证明,而笔者自身的探索和思考不足.如第2.5小节,证明 Poisson 求和公式完全可以利用实分析来完成,只需假定  $f$  是有界变差函数即可 (见 [27]), 相比之下,这里的讨论虽给出了两种方法,但都有些繁琐.在第2.6小节中,竟忘记了 Lebesgue 控制收敛定理,望读者引以为戒.

因此,这份笔记仍然需要修改和完善,笔者也一定会在今后的学习积累过程中不断修补、整理它,努力把它写得更精彩.也希望读者提出宝贵的意见和建议,非常感谢!

最后,请允许我用一句话勉励读者和自己:

“Error is ever with us. Yet some angelic need gently coaxes us striving mind upwards, towards truth.”

再次祝愿读者能够有所收获.

笔者 梁浩然

二零二零年七月十六日

## 第 3 章

## 问题提示

### 3.1 几何部分

1. 见 [2] 第四章第 2 节.
2. 提示: 利用推论 1.1.4.
3. 提示: 考虑  $g(z) = \frac{z_0 - \bar{z}}{1 - \bar{z}_0 z}$  令  $h(z) = f(z) \circ g(z)$ . 应用 Schwarz 引理.
4. 直接验证定义即可.
5. 提示: 先把三个点分别映到 0, 1 和  $\infty$ , 再把 0, 1 和  $\infty$  映到  $k$ , 1 和  $-1$ , 注意分式线性变换保交比.
6. 提示: 利用黎曼映照定理和 Schwarz 引理. 考虑  $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{D}$  的情形.
7. 提示: 利用黎曼映照定理、Carathéodory 定理.
8. 提示: 若  $f$  是单位圆盘  $\mathbb{D}$  到某正  $n$  边形的共形映射, 则  $f$  和旋转  $e^{2\pi i/n}$  可交换 (利用黎曼映照定理证明之). 从而 Schwarz-Christoffel 公式中的  $\zeta_k$  只能是  $n$  重单位根.
9. 提示: 需要用到习题 5 和 8 的结论.
10. 直接计算即可.
11. 思考: 如何运算更为简便?
12. 提示:  $f(z) + 1/2$  是奇函数. 利用递推证明  $B_n \in \mathbb{Q}$ .

### 3.2 级数部分

1. 提示: 仿照例 2.2.13.  $\alpha \rightarrow 0$  时与  $\sin \pi z$  的展开式一致.
2. 提示: 法一, 利用数学分析里的办法——Hölder 不等式. 法二, 验证原式可逐项求导, 利用二阶导恒正证明凸性.
3. 见 [2] 第五章第 2 节.
4. 略.
5. 只需证明

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\log n}{n^z} = \zeta(z) \sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda(n)}{n^z}.$$

注意到等式

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$$

即可. 对数论中常见函数、Dirichlet 级数的介绍, 感兴趣的同学可以分别查阅 Tom M. Apostol[30] 书中的第二章和第十一章.

6. 注意 (不熟悉这一结果的同学请查阅 [22] 第十六章第 6 节)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} dt = 1.$$

7. 这是个十分有趣的问题. 它本身并不困难, 注意一致收敛性即可.

## 参考文献

- [1] Elias M. Stein & Rami Shakarchi. Complex Analysis. Princeton University Press, Princeton, 1979.
- [2] Lars V. Ahlfors. Complex Analysis. McGraw-Hill, Inc., New York, 2003.
- [3] 张恭庆、林源渠. 泛函分析讲义 (上册). 北京: 北京大学出版社, 2001.
- [4] John B. Conway. Functions of One Complex Variable I. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [5] 尤承业. 基础拓扑学讲义. 北京: 北京大学出版社, 2004.
- [6] S. Eilenberg & N. Steenrod. Foundations of Algebraic Topology, Princeton Mathematical Series No. 15. Princeton University Press, Princeton, 1952.
- [7] John M. Lee. Introduction to Smooth Manifolds, 2nd edition. Springer Science, New York, 2013.
- [8] Reinhard Schultz. University of California, Riverside. Simply Connected Regions in The Plane, 2003. PDF file.  
<http://math.ucr.edu/res/math205B/ahlfors.pdf>
- [9] 方企勤. 复变函数教程. 北京: 北京大学出版社, 2017.
- [10] Online discussion on StackExchange.  
<https://math.stackexchange.com/questions/834279/ahlfors-extension-of-riemann-mapping-function-proof-clarification>
- [11] Serge Lang. Algebra. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [12] John B. Conway. Functions of One Complex Variable II. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [13] V.I. Bogachev & O.G. Smolyanov Topological Vector Spaces and Their Applications. Springer International Publishing AG. Springer International Publishing AG, New York, 2017.
- [14] 王竹溪、郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 北京大学出版社, 1963.
- [15] Harris Hancock. Elliptic Integrals. Dover Publications, Inc., New York, 1958.
- [16] Whittaker, E. T. & Watson, G. N. A Course of Modern Analysis, 4th edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [17] Selberg, A. & Chowla, S. On Epstein's Zeta-Function. J. reine angew. Math. 227, 86-110, 1967.
- [18] Tobin A. Driscoll & Lloyd N. Trefethen. Schwarz-Christoffel Mapping. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [19] Zeev Nehari. Conformal Mapping. Dover Publications, Inc, New York, 1952.
- [20] Jame W. Anderson. Hyperbolic Geometry, 2nd edition. Springer, New York, 2000.
- [21] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程 (上册). 北京: 高等教育出版社, 2003.

- [22] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程 (下册). 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [23] Eberhard Freitag. Complex Analysis 1. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [24] Eberhard Freitag. Complex Analysis 2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [25] Elias M. Stein & Rami Shakarchi. Fourier Analysis: An Introduction. Princeton University Press, Princeton, 2003.
- [26] Dinakar Ramakrishnan & Robert J. Valenza. Fourier Analysis on Number Fields. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [27] 郝平. 解析数论选讲. In preparation.
- [28] S. J. Patterson. An Introduction to the Theory of the Riemann Zeta-Function. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [29] David Mumford. Tata Lectures on Theta I. Birkhäuser Boston, Boston, 2006.
- [30] Tom M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory. Springer, New York, 1976.